Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор по учебной работе
_____________ В.А. Власов
«___» _______________ 2001 г.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА
ПО КУРСУ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО
(ГОС ВПО-2000)

Специальность **032100 «МАТЕМАТИКА»**

Утверждена на заседании
кафедры математического анализа

Протокол № 1 от 29 августа 2001 г.

Зав. кафедрой мат. анализа
____________проф. Е.И. Смирнов

Ярославль 2001

1. Цели и задачи дисциплины

В узкопроцессуальном смысле передача опыта предшествующих поколений (в нашем случае – обучение математике в педвузе) предполагает наличие следующих необходимых компонентов.

Процесс изучения математики в вузе

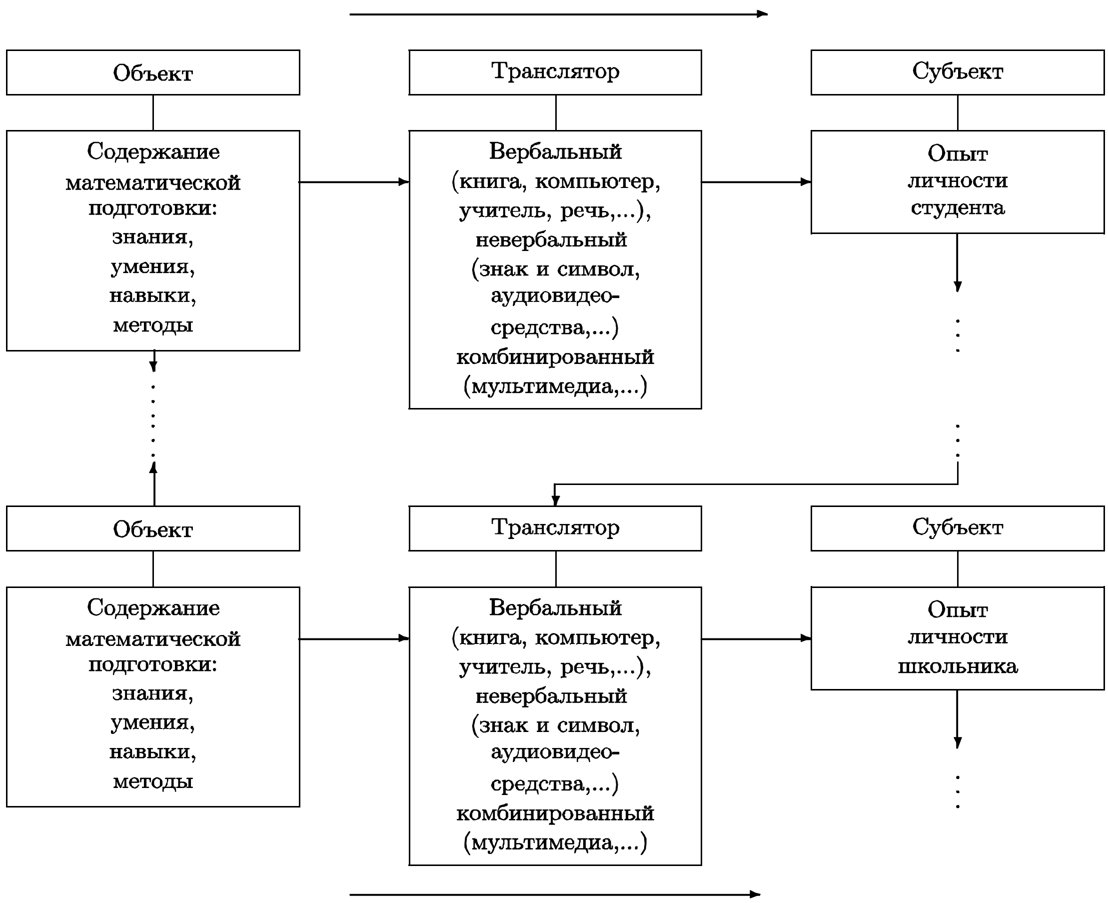


Рис.1. Процесс изучения математики в школе

Существенным моментом является то, что данная схема получает дополнительные структурные компоненты и связи в динамике целей и задач профессиональной деятельности учителя. В самом деле, субъект обучения (студент, будущий учитель математики) с началом профессиональной деятельности становится активным транслятором знаний на подкомпоненте объекта содержания математической подготовки учителя – школьном компоненте.

Если трактовать вложение школьного компонента в вузовскую как прямое обращение к элементам содержания, то исторический анализ показывает, что только в последние десятилетия (выпускники классических университетов вообще не получали полноценной методической подготовки) наметился реальный сдвиг в вузовском преподавании математики в сторону всестороннего изучения школьного знания (А.Н.Колмогоров, Н.Я.Виленкин, А.Г.Мордкович, Т.В.Дорофеев и др.). Однако приложенные усилия не привели к желаемым результатам, хотя очевидно огромное положительное влияние республиканской программы А.Г.Мордковича "Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя" (1987–1997 годы) на совершенствование профессиональной подготовки будущих учителей математики. Анализ отчетов председателей ГАК педуниверситетов России на рубеже введения Государственного образовательного стандарта (1990–1997 годы) показал наличие существенных недостатков готовности выпускников к профессиональной деятельности.

Более того, ориентация на активное усвоение обучаемым способов познавательной деятельности, на возможности самораскрытия личности и учет ее интересов и потребностей создает условия для придания педагогическому процессу инновационного характера. Инновационное обучение – процесс и результат такой учебной деятельности, которая стимулирует вносить инновационные изменения в существующую культуру. Изменение социальной роли знаний (в частности, математических) и творческих возможностей личности в современный период развития общества неизбежно ставит вопросы об оптимальном соотношении технологических и гуманистических ориентаций в организации обучения математике в педвузе, создания условий для самостоятельного освоения нового опыта.

Таким образом, необходимо существенно перестроить структуру и содержание математической подготовки студентов на основе психолого-педагогического анализа и целостного подхода к инновационному педагогическому процессу с учетом опыта предшествующих исследований.

Дидактический модуль учебного предмета представляет обоснование и дидактические материалы для обеспечения инновационного учебного процесса по курсу математического анализа и непосредственно расширяет содержание базовых учебных элементов (знания, умения, навыки, математические методы, алгоритмы и процедуры) школьной математики. Цель учебного предмета – содействовать формированию у студента когнитивных структур и личностных качеств посредством проектирования ориентировочной основы учебной деятельности, включая аудиторные и внеаудиторные формы работы (в том числе – самостоятельную). Целеполагание и решение педагогических задач: выделение и освоение базовых учебных элементов, уровневое и иерархическое построение и освоение аннотированной учебной и интегративной экзаменационной программы, реализация балльно-рейтинговой системы оценивания знаний, – создают основу для диагностируемого целеполагания учебной деятельности студентов и фундирования базовых учебных элементов школьной математики.

2. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

Ниже конкретизируются содержание и методика изучения разделов математического анализа, в основе диагностируемого целеполагания которых положены: целостность и устойчивость знаний (профессионально-ориентированных и теоретических), формирование обобщенных умений и общеучебных навыков, развитие математического мышления.

Принципиальным отличием структурообразующего принципа фундирования школьных знаний является определение основы для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений, навыков математической подготовки студентов педвузов. Начиная со школьного предмета через послойное фундирование его в разных теоретических дисциплинах, объем, содержание и структура математической подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении практической реализации теоретического обобщения школьного знания по принципу "бумеранга".

Такое фундирование знаний выводит на уровень, когда педагог вместе со студентом, уже владеющим предметной стороной, начинает отрабатывать с ним методическую сторону преподавания. Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из математики более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания.

Другой слой фундирования может образовать совершенствование и углубление практических умений, проектируемых ориентировочной основной учебной деятельности.

Основу для фундирования в виде базовых учебных элементов школьной математики (БУЭШМ) составляют семь содержательных линий: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, стохастическая и алгоритмическая. Каждая содержательная линия определяет базовые знания, умения, навыки и методы вузовской математики, распределенные по оптимальному набору учебных предметов и дисциплин. Учебный предмет, представляя собой целостную структуру учебной информации в составе теоретического, практического, прикладного, деятельностного, эвристического и гуманитарного компонентов, разворачивается в базисном (содержательном), процессуальном и иерархическом уровнях в своих локальных, модульных и глобальных проявлениях.

В развертывании содержания учебного предмета в контексте профессионализации фундирования БУЭШМ с особой отчетливостью прослеживаются три линии:

– логика определения содержания учебного предмета, исходя из его особенностей: отбор базовых учебных элементов, структуры, этапы изучения, интегративные знания, соотношение теоретического и практического компонентов и т.п.;

– логика преемственности и содержания теоретического обобщения БУЭШМ: содержательные линии школьной математики и набор учебных предметов вузовского обучения, построение системы логически взаимосвязанных видовых проявлений базовых родовых понятий, усиление прикладного и деятельностного компонентов обучения математике, модульный принцип развертывания содержания учебного предмета и т.п.;

– учет психологических и педагогических особенностей восприятия, усвоения, представления, применения, анализа и синтеза учебного материала субъектом обучения: наглядное моделирование, имитационное моделирование, структурный анализ базовых учебных элементов, усиление эвристического и гуманитарного компонентов, развитие интеллектуальных и личностных характеристик, вариативность решения учебных задач, взаимопереходы знаковых систем и т.п.

Структура глобального фундирования разворачивается по шести базовым учебным предметам сквозного характера (в течение всех лет обучения): математический анализ, алгебра, геометрия, алгоритмика, стохастика, элементарная математика, которые продолжают и углубляют семь содержательных линий школьной математики. Другой срез структуры образуют

3 слоя фундирования:

– профессиональный (I–III семестры), предназначенный для формирования ближайшего видового обобщения методом наглядного моделирования базовых учебных элементов школьной математики;

– фундирования (IV–VI семестры), предназначенный для освоения глубокого теоретического обобщения БУЭШМ;

– технологический (VII–X семестры), предназначенный для освоения технологических приемов профессиональной деятельности и методического обоснования изучения БУЭШМ.

Каждый учебный предмет предполагает развертывание методико-исторического оснащения (1 час дополнительно на каждые 10 лекционных часов) базовых учебных элементов: генезис, персоналии, прикладные и эвристические задачи, вариативность анализа, сбор и анализ данных, поиск интегративных знаний, умений, алгоритмов, идей и процедур, деятельность в условиях ограничения средств и т.п.

При этом необходимо обеспечить (ДПП):

1. Сквозное развертывание учебных предметов в рамках базисного (профессионального) блока, блока фундирования (теоретическое обобщение БУЭШМ), технологического блока (моделирование профессиональной деятельности)

– математический анализ,
– геометрия,
– алгебра,
– алгоритмика,
– стохастика,
– элементарная математика.

2. Раскрытие целостного содержания учебного предмета посредством связующей цепи учебных дисциплин с отражением

– теоретического,
– практического,
– прикладного,
– эвристического,
– конкретно-деятельностного,
– гуманитарного компонентов.

3. Знание, понимание, применение, анализ, синтез, генезис и оценку содержания Федерального образовательного стандарта школьной математики.

4. Профессионально-технологическое обеспечение подготовки (информационные технологии, педагогические технологии, педагогические и лабораторные практики, банк конкретно-деятельностных процедур и методических комплексов) в рамках учебных предметов и содержательных линий.

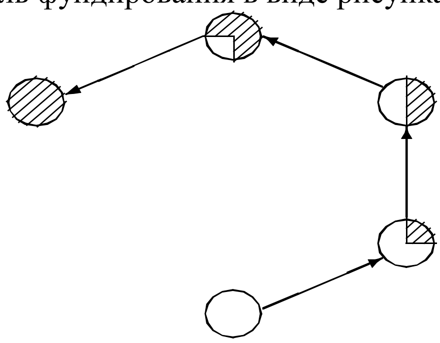
5. Формирование психологической системы профессиональной и учебной деятельности в единстве и взаимосвязи их компонентного состава.

6. Создание педагогических условий для развивающего эффекта обучаемости, интеллектуальной деятельности и креативности личности в процессе профессиональной подготовки.

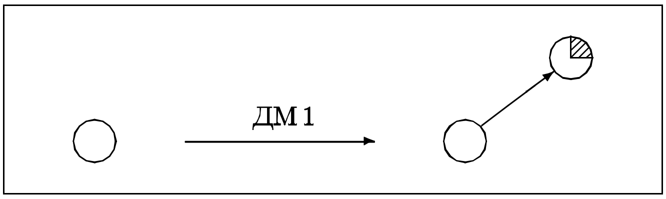
7. Принятие педагогической профессии и становление профессиональной идентичности личности будущего учителя. Структурообразующим фактором профессионализации предметной подготовки студентов является организация контролируемой самостоятельной работы студентов.

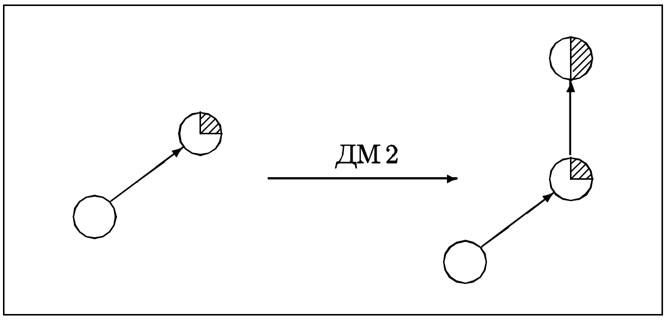
Элементы технологии фундирования наглядного моделирования, определяющие ориентировочную основу деятельности (ООД) студентов в течение семестра, направленные на формирование опыта личности, представлены на следующей схеме:

Дидактический модуль (ДМ) развертывается в течение 1–2 учебных семестров, включая ориентировочную и информационную основу совместной деятельности учителя и ученика. Важнейшими компонентами проектирования ДМ являются актуализация фрагментов спиралей фундирования и устойчивости базисных школьных учебных элементов. Если условно закодировать произвольную спираль фундирования в виде рисунка,



то ее актуализация в дидактических модулях реализуется по целостным фрагментам:

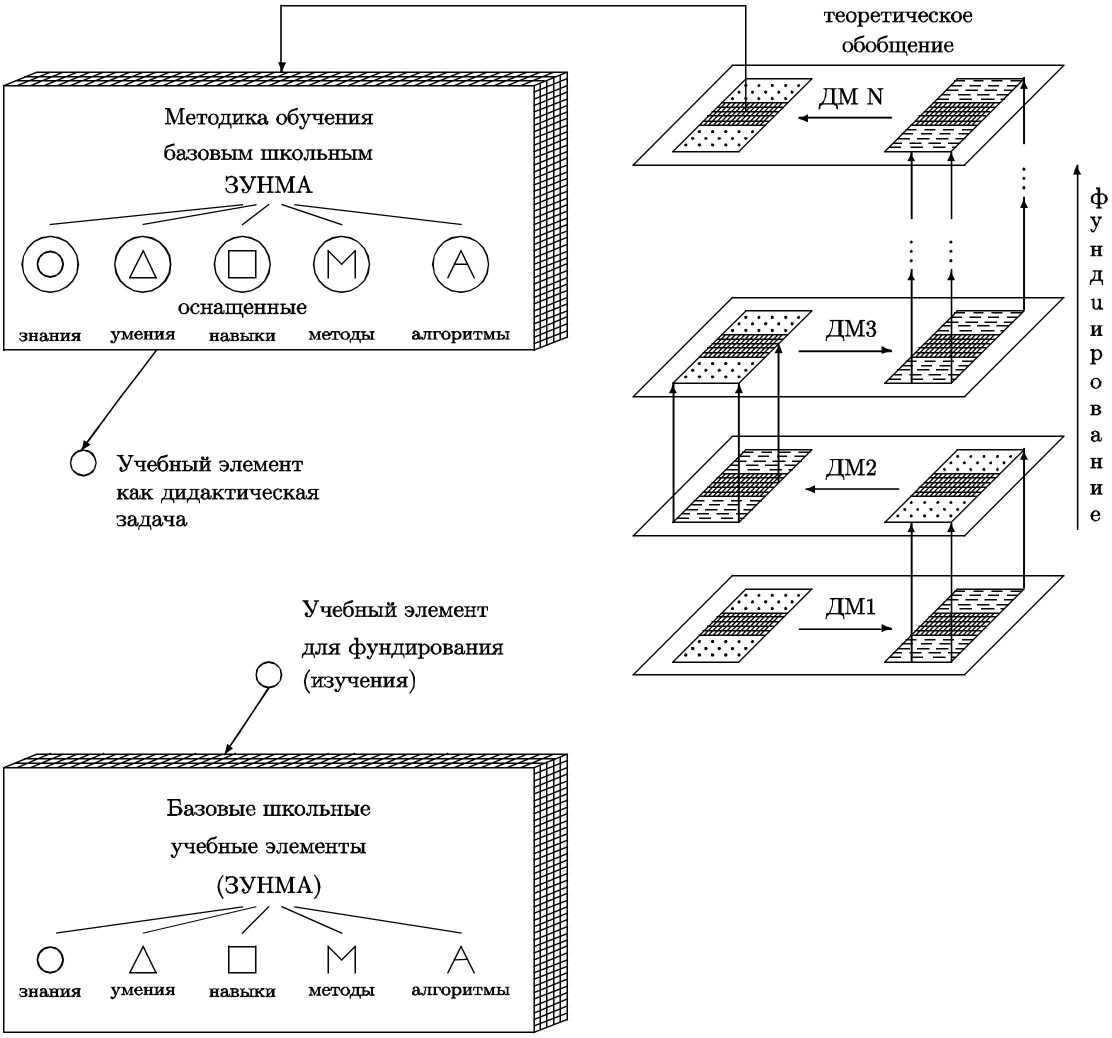




. . .

При этом важно отметить, что при изучении сложного раздела математики в дидактически оправданной последовательной цепи ДМ1⟶ДМ N происходит "склеивание" последующего и предыдущего компонентов по следующему принципу: интегративные учебные элементы ДМ S (включая фрагменты спиралей фундирования) трансформируются в исходную базу учебных элементов ДМ S+1. Целостная картина дидактического процесса технологии фундирования представлена на следующем рисунке:

Педагогическая технология фундирования школьного знания
(дидактические модули учебного предмета)



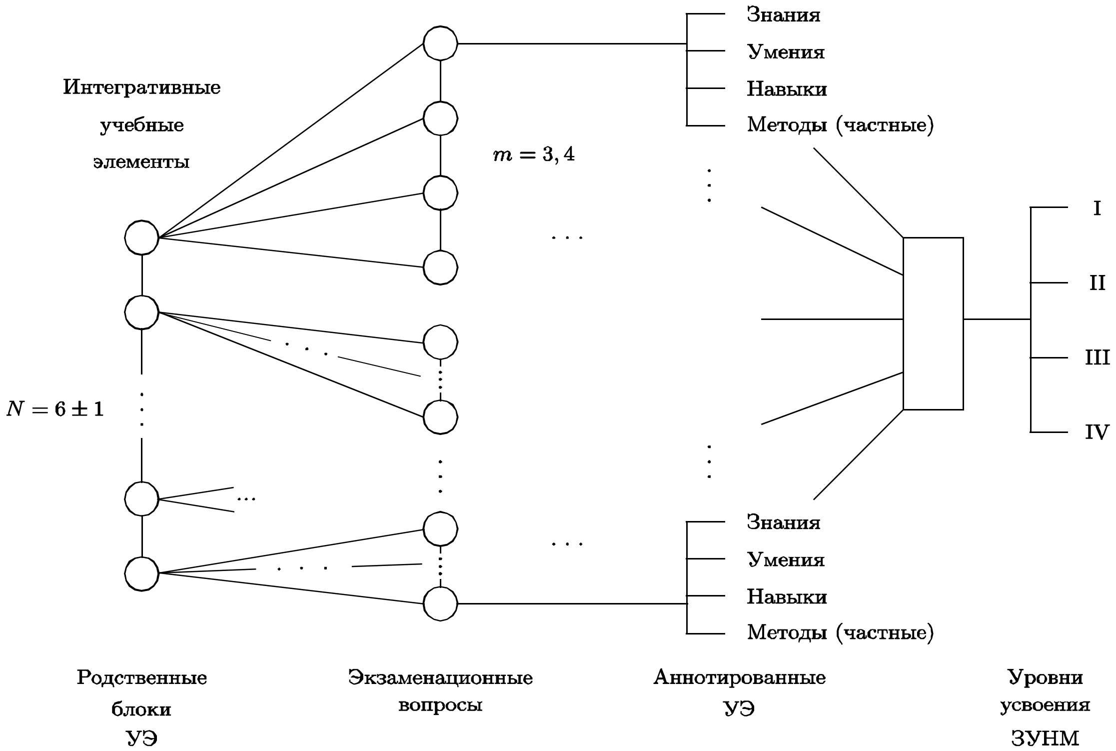
ДМ – дидактический модуль раздела учебного предмета,

– содержание учебных элементов, необходимых для изучения ДМ,

– интегративная экзаменационная программа ЗУНМА для ДМ,

– базовые школьные учебные элементы (ЗУНМА).

Общая схема структурирования интегративных учебных элементов из аннотированной учебной программы показана ниже:



Реализация целей и задач учебной деятельности студентов всецело определяется требованиями к средствам управления их познавательной деятельностью: методическими приемами, дидактическими правилами, образцами деятельности, материальными и информационными ресурсами. Например, приемы локального моделирования включают: оперативную наглядность, кодирование знаково-символических средств, определение мотивационных блоков, построение семантических и реляционных сетей, структурных блок-схем, логический анализ теорем и структурный анализ понятий.

Следующие **дидактические правила** отражают существо технологии наглядного моделирования и сквозные, универсальные, существенные требования к управлению базовыми учебными элементами.

Технологические компоненты управления усвоением (МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ УМЕНИЯ)

Правило 1. Математическое знание должно рассматриваться по возможности в четырех сферах: **знаково-символической, вербальной, графической и конкретно-деятельностной**.

Правило 2. Математическое знание должно проявляться в процессе освоения обучаемым не менее чем в **10 конкретизациях** (5 качественных).

Правило 3. Освоение математического знания предполагает как компонент обучающей и изучающей деятельности с ним , **логический анализ** содержания и формы в рамках специальных процедур.

Правило 4. Мотивационная сфера обучаемого в процессе освоения математического знания должна быть материализована 2–3 **модельными (прикладными) задачами** (в том числе для спиралей фундирования).

Правило 5. Математическое знание должно проявляться **как часть более общего целостного** знания, в котором оно имеет свои особенности, ограничения и форму. **Контрпримеры** должны подтверждать появление нового качества в цепочке фундирующих модусов продвижения от конкретного знания к обобщающей сущности.

Правило 6. Математическое знание должно рассматриваться **в генезисе** своего становления, во взаимосвязи с историческим аспектом формы и содержания.

Правило 7. Математическое знание должно иметь форму представления посредством **числа (действительного или комплексного), геометрической фигуры** в процессе развертывания конкретно-деятельностных процедур.

Фрейм исходной базы учебных элементов

Преемственность школьной и вузовской математики проявляется в том числе и в том, что базовые учебные элементы школьной математики (знания, умения, навыки и математические методы) остаются таковыми и в вузовской математике (число, функция, предел, непрерывность, производная, интеграл и т.д.). Однако глубина осознания учеником существа понятия, теоремы, метода, процедуры существенно отличается как по целеполаганию, так и по содержанию и объему. В школьной математике большинство учебных элементов должно усваиваться на уровне **базы данных**, то есть ученик знает, умеет выполнять практические действия, но только на уровне репродукции и иногда переноса в новые ситуации. В вузовской же математике целью является достижение творческого уровня усвоения учебных элементов, когда осуществляется проникновение в существо понятия или теоремы, на высоком уровне самостоятельности, вариативности, новизны и критичности. Существо математического объекта проявляется через установление установочных связей базовых компонентов объекта с внешними математическими объектами, прочно усвоенными ранее. Это может быть достигнуто двумя путями: моделированием существенных и устойчивых внутренних связей и компонентов целостного математического объекта или широким показом вариативности качественных и количественных признаков объекта, образуя при этом гармоничное целое. Здесь математический объект проявляется уже на уровне **базы знаний**.

Но в подготовке компетентного учителя математики важен и третий уровень, когда школьный учебный элемент не только переходит из уровня базы данных в уровень базы знаний, но и фиксируется **процедура** получения математического знания, ее вариативность, доступность и устойчивость, существо которой и выражается наглядным моделированием. Например, понятие первообразной (неопределенного интеграла) в школьной математике, равно как техника интегрирования осваиваются на уровне базы данных.

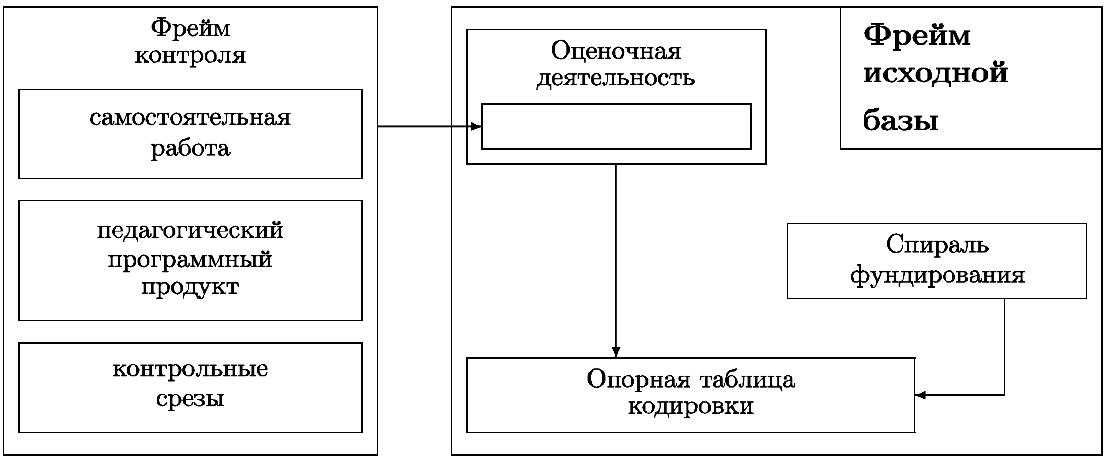
Только позднее студент узнает, что рациональная дробь всегда интегрируется в конечном виде, а разложение на простейшие рациональные дроби есть следствие важной теоремы Коши из комплексного анализа и что первообразная функция абсолютно непрерывна. Эта информация в последующей профессиональной деятельности учителя может и забыться, но останется осознанное умение интегрировать рациональные дроби и навык интегрирования основных элементарных функций.

Поэтому так важно в управлении познавательной деятельностью студентов создать условия для непрерывного сохранения в памяти определенной информации так называемых "ночных" знаний, которые могут быть воспроизведены в любой необходимый момент и составляют основу профессионально важных школьных математических знаний, умений, навыков и методов. Последние особенно важны, так как отражают универсальный сквозной способ математической деятельности, системный характер математических правил и действий.

Сжатие информационно-деятельностной составляющей остаточных учебных элементов осуществляется средствами фреймовых моделей. Основатель теории фреймов М.Минский дает следующее определение: "Фрейм (рамка) – это единица представления знаний, запомненная в прошлом, детали которой при необходимости могут быть изменены согласно текущей ситуации". В тех случаях, когда многое можно сказать о содержимом вершины сети целесообразен переход к фреймовому представлению, содержащему ячейки (слоты) и имена ячеек. Фрейм может иметь многоуровневую структуру. Наличие имен фреймов и имен слотов обеспечивает возможность внутренней интерпретируемости знаний, хранимых во фреймах, а также активизации фрейма за счет процедурных слотов. Таким образом, фреймовые модели удовлетворяют всем четырем основным требованиям к знаниям (внутренняя интерпретируемость, структурированность, связность и активность).

Для учебного материала I семестра фрейм остаточной базы определяется школьным математическим содержанием по учебному предмету "Алгебра и начала анализа".

Фрейм исходной базы школьных знаний представлен на следующей схеме:



Эффект достигается развертыванием спиралей фундирования базовых школьных учебных элементов и разнообразной контролирующей деятельностью, включая информационные технологии.

3. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид занятий	Всего часов
Общая трудоемкость (по ГОС ВПО)	96
Аудиторные занятия	46
Лекции	30
Практические занятия	16
Лабораторные работы	2
Самостоятельная работа	50
Другие виды работы	–
Форма итогового контроля	Зач.

4.Содержание дисциплины

4.1. Разделы дисциплины и виды занятий

6.	**Теория функций действительного переменного**	30	16	2

Самостоятельные работы – 3 по 15 минут;
контрольные работы – 1;
коллоквиум –1;
вид итогового контроля – зачет.

4.2. Содержание разделов дисциплины

	Содержание учебных дисциплин	Лек	ПЗ	ЛЗ
1	Понятие мощности множества. Счетные множества и их свойства. Примеры. Счетность множества рациональных и алгебраических чисел. Теорема об индексах. Сравнение мощностей: теорема Кантора– Бернштейна, существование высших мощностей. Упорядоченность множества трансфинитных чисел	4	2	
2	Мощность континуума. Мощность подмножеств счетного множества. Мощность $\mathbf{T}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{R}$. Совершенные множества. Множество Кантора. Строение открытых и замкнутых множеств в $\mathbf{R}$. Теорема Бореля–Лебега. Континуальность функциональных пространств и пространств последовательностей	2	4	
3	Метрические пространства; примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Покоординатная сходимость, равномерная сходимость. интегральная сходимость; примеры. Теорема Банаха. Сжимающие операторы в $\mathbf{R}$, приложение к приближенному решению уравнения $F(x)=0$. Вычисление $\sqrt{a}$ методом последовательных приближений.	2	-	
4	Кольцо и полукольцо, алгебра и σ-алгебра множеств. Мера плоских множеств, счетная аддитивность меры элементарных множеств. Понятие внешней меры и ее счетная полуаддитивность. Измеримые множества, условие Каратеодори, алгебра и топология измеримых множеств	4	2	

5	Измеримые функции, основные свойства. Классы Бэра. Примеры. Сходимость почти всюду, по мере, их взаимосвязь. Топологическое векторное пространство S со счетной сходимостью по мере. Пространство Фреше.	4	2	
6	Интеграл Лебега, суммы Лебега-Дарбу, суммируемые функции. Основные свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Предельный переход под знаком интеграла Лебега	4	2	
7	Пространства L_1 и L_2, их полнота. Понятие банахова и гильбертова пространства. Сходимость в среднем. Производная Фреше. Формула Лагранжа конечных приращений	4	2	
8	Ортогональные системы векторов и базисы в гильбертовом пространстве. Ряд Фурье по ортогональной системе векторов. Тригонометрическая система функций. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации	2	-	2
9	Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Необходимое и достаточное условие полноты ортонормированной системы	2	-	
10	Задача разложения функции в тригонометрический ряд. Соотношение ортогональности. Интеграл и ядро Дирихле. Разложение кусочно-гладкой функции в ряд Фурье на промежутках	2	2	

5. Лабораторный практикум

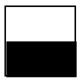
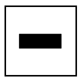
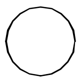
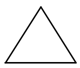
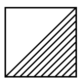
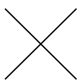
п/п	раздела учеб. предм.	Наименование лабораторной работы
1	1	1. Компьютерный контроль (Lim) по теме "Предел функции" (2 часа) 2. Нахождение корней трансцендентных уравнений (графический калькулятор) (2 часа)
2	2	1. Компьютерный контроль (Dif) по теме "Производная" (2 часа) 2. Нахождение $\min \mathrm{N}(\varepsilon)$ для числовой последовательности x_n (педагогический программный продукт) (2 часа) 3. Нахождение корней многочлена методом хорд (графический калькулятор) (2 часа)
3	3	1. Компьютерный контроль (Int) по теме "Интеграл" (2 часа) 2. Нахождение значений определенного интеграла методом трапеций (графический калькулятор) (2 часа)
4	4	1. Градиентные методы нахождения экстремума (2 часа) 2. Метод последовательных приближений в $\mathbf{R}^n$ (2 часа) 3. Численное интегрирование в $\mathbf{R}^n$ (2 часа)
5	5	1. Компьютерный контроль (Sum) по теме "Ряды" (2 часа) 2. Распознавание типа дифференциального уравнения (педагогический программный продукт) (1 час) 3. Численное решение дифференциального уравнения

		$y' = f(x, y)$ методом Рунге-Кутта (графический калькулятор) (2 часа)
6	6	1. Решение уравнения Фредгольма (2 часа) 2. Геометрия конформных отображений (2 часа)

Система оценивания. Активное овладение методами и технологиями усвоения знаний (в том числе на творческом уровне) является профессиональной необходимостью для будущего учителя математики. Поэтому процесс обучения математике в вузе организуется таким образом, чтобы, в частности, студент, самостоятельно работая с учебным материалом, получил образцы (ООД) деятельности, способствующие как усвоению знания, так и формированию ориентировочной основы для будущей профессиональной деятельности.

Воспользуемся **балльно-рейтинговой** системой оценивания для составления графика учебного процесса.

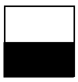
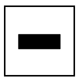
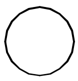
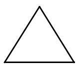
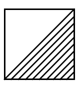
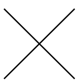
Формы учебной работы и шкала оценивания

N	Формы учебной работы	Код	Содержание контроля	Шкала оценивания
1.	Самостоятельная 15-минутная работа по теме N		3 задачи (3-я задача – срез остаточных знаний)	0–2 балла за каждую работу
2.	Компьютерный контроль в дисплейном классе		5 заданий с таймером: предел функции	0–6 баллов
3.	Домашняя контрольная работа		30 задач	0–10 баллов
4.	Творческая исследовательская работа		Реферат или подготовка доклада на научной конференции или статья	0–10 баллов
5.	Аудиторная контрольная работа	К/Р	5 заданий на 2 академических часа	0–10 баллов
6.	Коллоквиум по заданной теме	К	Собеседование на оценку по заданной теме 1. системы счисления; 2. системы координат	0–6 баллов
7.	Лабораторный практикум		Просмотр видеофильмов с отчетом; 3 работы на микрокалькуляторе	0–6 баллов
8.	Зачетная неделя			

Студенты, качественно и в срок выполняющие домашние задания, освобождаются от текущей самостоятельной работы с максимальной оценкой.

Для получения оценки "зачтено" по итогам работы в семестре необходимо достичь суммы баллов не ниже 37 по всем формам учебной деятельности. Достигшие максимальной суммы баллов (более 50) получают особый статус экзаменационного оценивания. График учебного процесса представлен на следующей схеме.

График учебного процесса

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ЛК	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
ПК	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
																		
																		
																		
																		
К/Р																		
К																		
																		
																		

*) устанавливаются еженедельные консультации по всем видам и формам учебной деятельности

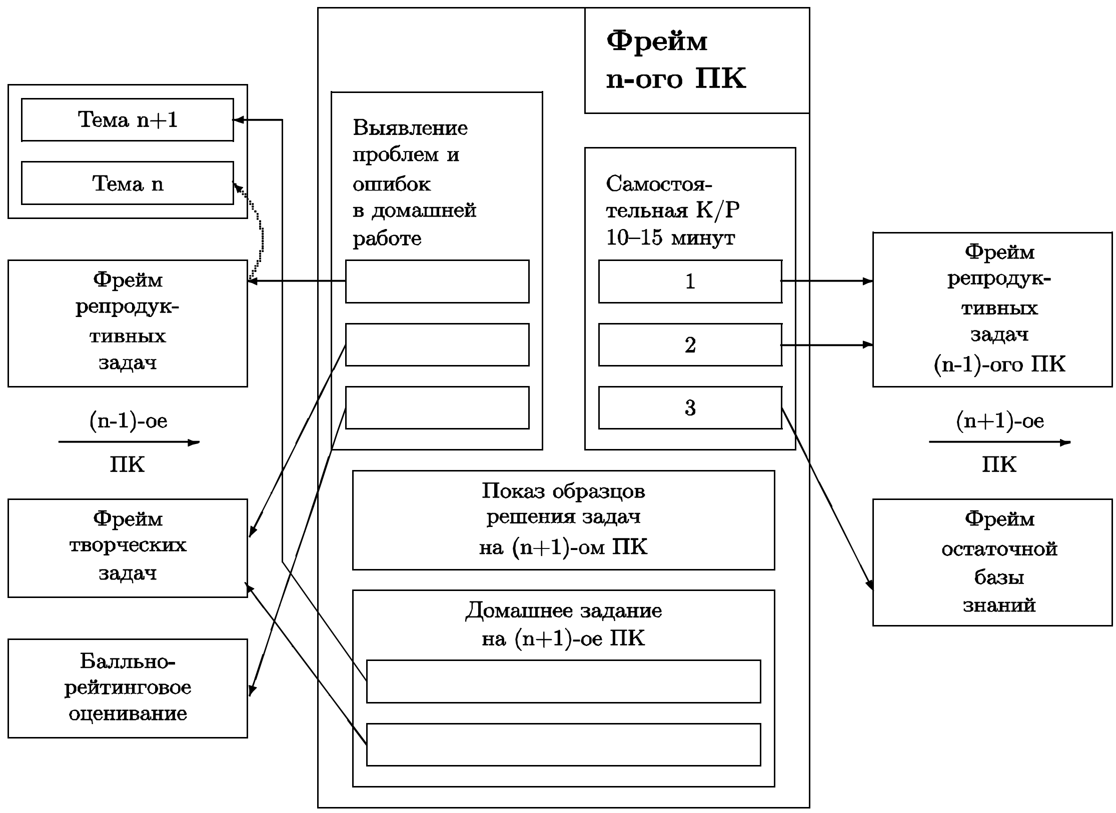
Методика работы в малых группах (опережающее отражение). В процессе формирования приемов учебной деятельности в различных формах коммуникации (лекции, практические и лабораторные занятия, оценивание, компьютерный контроль, деловые игры, самостоятельная работа и т.д.) у группы студентов стихийно выделяются неформальные лидеры. Эти студенты обладают чуть большими по сравнению с окружающими способностями к восприятию нового учебного материала, чуть более обширными общеучебными навыками и коммуникативными качествами, чуть более высоким интеллектуальным потенциалом. Опыт преподавания показывает, что вокруг лидера формируется коллектив (малая группа в 3–4 человека, иногда 2 студента), который стихийно вырабатывает общие унифицированные приемы поведения, организует эффективный обмен идеями и образцами деятельности, оптимизирует вклад каждого члена в достижение учебных целей. Эта "фракционная" деятельность студентов постоянно входит в противоречие с традиционными методами контроля, организации творческой деятельности и самостоятельной работы.

Здесь предлагается методика эффективного использования потенциала малых групп для более качественного усвоения знаний, формирования творческой активности студентов, развития профессионально важных качеств личности будущего учителя математики:

1. По прошествии небольшого числа (6–8) практических занятий на I курсе (процесс формирования коллектива) преподаватель определяет 6–7 малых групп (по итогам наблюдения) по 2–4 студента, достаточно подвижных по своему составу, и фиксирует ситуацию, объявляя состав малых групп и установку на дальнейшую совместную деятельность.

2. График учебного процесса и виды учебной деятельности (самостоятельные контрольные работы на 10–15 минут, творческие задания, домашние контрольные работы, контроль в дисплейном классе, лабораторные занятия и т.п.) планируются *a priori* с дифференциацией и вариативностью на 7 блоков с общей ответственностью и результатом в малой группе. Эта методика не касается проведения текущих контрольных работ (2-х часовых) и зачетно-экзаменационных мероприятий, которые ориентированы на индивидуальную ответственность студента.

3. Практическое занятие проводится по следующей схеме (ПК – практические занятие):



Таким образом, если в традиционной методике проведения практического занятия большая часть учебного времени отводится на показ образцов решения задач по теме, то в нашей методике студент по объявленной теме и минимальным образцам решения большую часть времени проводит за самостоятельным решение достаточного количества задач, в том числе, творческого характера. На занятие он приходит с проблемами, ошибками и нерешенными заданиями; преподаватель, выяснив ситуацию с домашней работой, разбирает решения наиболее типичных задач, акцентирует внимание на ошибках, показывает приемы творческого подхода к решению заданий.

Происходит "опережающее отражение" в формировании практических умений в решении математических задач: получив минимальные образцы деятельности, студент самостоятельно (или в малой группе) определяет методы решения, сталкивается с проблемами содержательного, субъективного, временного характера.

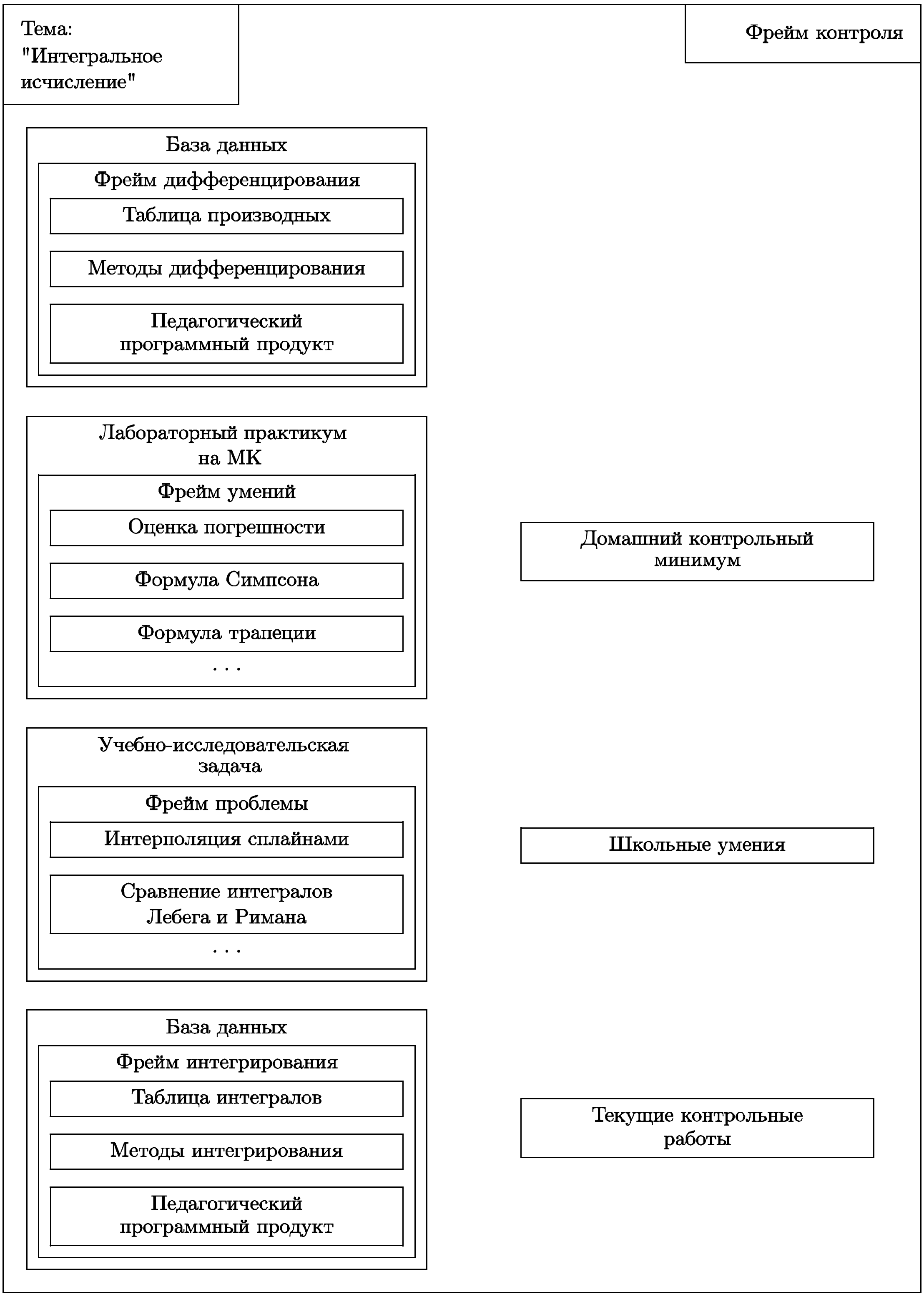
Самостоятельные контрольные работы (10–15 минут) создают деятельностный фон непрерывного хранения базовой информации и фиксируют состояние остаточной базы знаний предыдущего семестра. Балльно-рейтинговая система оценивания стимулирует ответственное отношение к учебной деятельности.

4. В формировании мотивационной сферы обучения математики немаловажную роль играет проявление познавательного интереса у студентов путем развертывания генезиса математических идей в историческом аспекте. Работа в малых группах дает возможность, в частности, оптимизировать число разрабатываемых исторических тем, равно как и их целостность раскрытия сущности математического факта. Например, семестровые рефераты, отражающие историю становления математических понятий в содержательном, прикладном, хронологическом аспектах, создают основы для обсуждения на коллоквиумах, научных конференциях, стимулируют развитие творческой активности студентов, умение работать с научной и художественной литературой.

Результативность обучения математике при условии диагностируемого целеполагания и определенной системы измерителей качества усвоения учебного материала выявляется организацией различных средств контроля и обратной связи (теоретический, прикладной, гуманитарный, творческий модули), каждый из которых имеет свою специфику и качественные отличия.

Рассмотрим, например, систему контроля практических умений по теме "Интегральное исчисление". Используем фреймовое представление знаний. Фрейм контроля состоит из следующих слотов:

Фрейм контроля практических умений по теме «Интегральное исчисление»


Тема:
"Интегральное исчисление"
Фрейм контроля
База данных
Фрейм дифференцирования
Таблица производных
Методы дифференцирования
Педагогический программный продукт
Лабораторный практикум на МК
Фрейм умений
Оценка погрешности
Формула Симпсона
Формула трапеции
. . .
Домашний контрольный минимум
Учебно-исследовательская задача
Фрейм проблемы
Интерполяция сплайнами
Сравнение интегралов Лебега и Римана
. . .
Школьные умения
База данных
Фрейм интегрирования
Таблица интегралов
Методы интегрирования
Педагогический программный продукт
Текущие контрольные работы

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Рекомендуемая литература

а) основная литература:

1. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 1, 2, 3. М.: Наука, 2001.

2. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2007.

3. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

4. А.И.Маркушевич, Л.А.Маркушевич. Введение в теорию аналитических функций. М., Просвещение, 1977.

5. Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., Физматлит, 2006.

6. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 2000.

7. П.И.Шмелев. Теория рядов. М., Наука, 1978.

8. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. 1970.

б) дополнительная литература:

1. Л.Д.Кудрявцев. Математический анализ. Т. 1, 2. М., Высшая школа, 2003.

2. И.М.Уваренков, М.З.Маллер. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М., Просвещение, 1976.

3. Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1,2,3, М., Физматлит, 2006.

4. А.И.Маркушевич, Л.А.Маркушевич. Введение в теорию аналитических функций. М., Просвещение. 1977.

5. Г.Е.Шилов, Б.Л.Гуревич. Интеграл, мера и производная. Общая теория. М., Наука, 1967.

6. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1977.

7. М.А.Евграфов. Сборник задач по теории аналитических функций. М., Наука, 1972.

8. Б.З.Вулих. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., Наука, 1970.

6.2. Средства обеспечения освоения дисциплины

Автоматизированность и оптимальность управления контролирующей деятельностью достигается применением **педагогических программных продуктов**. Ниже приведены дидактические материалы контроля умений с использованием компьютера.

Система контролирующих программ (4 программы по темам: предел (Lim), производная (Dif), интеграл (Int), ряды (Sum) для персонального компьютера предназначена для текущего контроля базовых умений и навыков по математическому анализу и служит целям:

а) непосредственного контроля и получения обратной связи;

б) стабилизации остаточных фреймов основных умений и навыков;

в) систематизации и спорности изучаемого материала;

г) овладения межпредметными информационными связями.

Данная система контроля отличается от обычного контроля большей наглядностью и объективностью оценки, большей самостоятельностью при выполнении заданий, большей эффективностью оперативного контроля, возможностью вызова правильного ответа после выполнения задания.

Каждая программа содержит банк задач трех уровней, а также тренажер, которым студент может воспользоваться при изучении определенного раздела математического анализа (предел функции, дифференцирование, интегрирование, ряды). Банк задач первого уровня содержит задачи, при решении которых применяется не более одного из изучаемых методов и не требуется сложных вычислений. Для решения задач второго уровня приходится комбинировать известные методы, проводить более сложные преобразования. Задачами третьего уровня являются задачи повышенной трудности. Наличие банка задач трех уровней дает возможность дифференцированного обучения студентов, а также использования настоящего пакета программ на различных уровнях обучения.

Банк задач каждого уровня состоит из 50 заданий 5 основных типов, отражающих основные (базовые) умения и навыки данного раздела математического анализа. Время выполнения каждого из 5 заданий, получаемых случайным выбором, фиксируется таймером с накоплением временного интервала, влияющего на итоговую оценку. Время, отводящееся для решения каждой задачи, погрешность при вводе числового ответа, критерии оценки, равно как и сам банк заданий, могут быть приведены в соответствие с требованиями преподавателя, проводящего текущий контроль.

Целевая установка контроля:

а) информационно-межпредметные связи: знакомство с клавиатурой, графические и функциональные возможности ЭВМ, адекватное восприятие знаково-символических форм, отражающих конкретное математическое содержание, мотивация обучения;

б) оперативность контроля: академическая группа из 25 студентов проходит контроль в дисплейном классе (12 мониторов) в течение 30–40 мин. (Dif, Lim) и 100–120 мин. (Int, Sum) при непосредственном восприятии преподавателем результатов контроля (как количественных, так и качественных – число решенных заданий, количество ошибок в каждом задании, просрочка времени по каждому заданию, общее затраченное на решение заданий время, общее количество ошибок, оценка). Соответственно, в двух дисплейных классах время на проведение контроля уменьшается в 2 раза;

в) система контролирующих программ позволяет создать ассоциативно-рефлекторный фон опорных навыков и умений по курсу математического анализа. Схема внедрения контролирующих программ приведена ниже;

г) стабилизация остаточных фреймов – повторное включение машинного контроля в учебный процесс стимулирует самостоятельную подготовку студентов к изучению новых разделов математического анализа (например, при изучении частных производных и действий над ними требуются навыки дифференцирования функций одного переменного, а точнее – восстановление следов предыдущих знаний (фреймов), что достигается повторным включением контролирующей программы (Dif));

д) мобильность контроля – возможность изменять банк заданий, исходя из особенностей преподавания и методических концепций, возможность менять уровень требований к оценке контроля, возможность менять погрешность при вводе ответа, возможность менять временные интервалы, фиксирующие среднее время, необходимое для выполнения отдельного задания.

Схема
внедрения системы контролирующих программ по математическому анализу

Раздел / Тема	Введение в анализ	Дифф. исчисл.	Интегр. исчисл.	ФПН	Дифф. уравн.	ТФКП
(Lim) Предел	+					
(Dif) Производная		+		+		
(Int) Интеграл			+	+	+	
(Sum) Ряд	+	+	+	+	+	

Примечание. Программа (Int) для ввода ответа предполагает использование микрокалькулятора.

Лабораторный практикум с использованием микрокалькуляторов (в том числе графических) предназначен для оперативного управления формированием и стабилизацией практических умений конкретизации базовых понятий, теорем и процедур. Приведем несколько примеров лабораторных работ.

1. По формуле прямоугольников найдите приближенное значение определенного интеграла $\int_1^2 \sqrt{x}dx,$ разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оцените погрешность, проведите вычисления на микрокалькуляторе по программе

ПО	О	ПС	С/П	ПВ	С/П	ПА	–	ИПО	$\div$
ПО	...	...	ИПС	+	ПС	ИПА	ИПО	+	ПА
ИПВ	–	$F_x \geq 0$	11	ИПС	ИПО	x	С/П	БП	ОО,

заполнив пропущенный фрагмент вычислением значений подынтегральной функции. Напишите инструкцию к программе. Составьте вариант программы с организацией цикла. Проведите вычисления по этим программам для n=10, n=20, n=100. Оцените погрешность вычислений.

Указания к решению:

Пропущенный фрагмент содержит две команды

ИПА $F\sqrt{\ }$.

Инструкция к программе:

1. FПРГ;
2. ввести программу;
3. FАВТ;
4. В/О;
5. $n \longrightarrow R_g X$;
6. С/П;

7. $b \longrightarrow R_g X$;

8. С/П;

9. $a \longrightarrow R_g X$;

10. С/П;

11. прочитать показания индикатора;

12. перейти к п. 5, повторив вычисление для нового значения n.

Оценим погрешность: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2}$ для $x \in [1; 2]$,

$$R_n \le \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M, где M = \max_{a \le x \le b} |f'(x)|,$$

$$R_{10} \le \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} = 0,025;$$

$$R_{20} \le \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2} \le 0,013;$$

$$R_{100} \le \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{2} = 0,0025.$$

Результаты вычислений по программе:

n	Показания индикатора	Приближенное значение интеграла
10	1,1981187	$1,20 \pm 0,025$
20	1,2085656	$1,21 \pm 0,013$
100	1,2168792	$1,217 \pm 0,0025$

Другой вариант программы с организацией цикла:

ПО О ПС С/П ПВС/ППА – ИПО ÷
ПО ИПА F ИПС+ ПС ИПАИПО+ ПА
FL111 ИПСИПО× С/ПБП ОО

Инструкция к программе:

1. FПРГ;
2. ввести программу;
3. FАВТ;
4. В/О;
5. $n \longrightarrow R_g X \longrightarrow R_g 1$;
6. С/П;
7. $b \longrightarrow R_g X$;
8. С/П;
9. $a \longrightarrow R_g X$;
10. С/П;
11. прочитать показания индикатора;
12. перейти к п. 5.

2. По формуле трапеций найдите приближенное значение определенного интеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, разбив интервал интегрирования на 10 равных частей. Оцените погрешность. Проведите вычисления на микрокалькуляторе по данной программе

ПО С/П ПВПП 36 ПС С/ППП 36 ИПС

– 2 ÷ ПС ИПВИПА– ИПО ÷ ПВ
ИПАИПВ+ ПП 36 ИПС+ ПС FLO20
ИПСИПВ× С/ПБП ОО ПА ... ... В/О,

заполнив пропущенный фрагмент вычислением значений подынтегральной функции. Составьте другой вариант программы без организации цикла. Проведите вычисления по этим программам для n=10, n=20, n=100. Оцените погрешность вычислений.

Указания к решению.

Пропущенный фрагмент программы содержит команды:

$$Fx^2 / - / Fe^x;$$

n, b, a вводятся в регистр $R_g X$.

Оценим погрешность:

$$R_n \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M, \text{где } M = \max_{a \le x \le b} | f''(x) |,$$

$$f'(x) = -e^{-x^2} \cdot 2x, \quad | f''(x) | = | -2e^{-x^2}(1-2x^2) | = \frac{2}{e^{x^2}} \cdot | 1-2x^2 | \le 2, \quad x \in [0;1];$$

$$R_{10} \le \frac{1}{1200} < 0,002;$$

$$R_{20} \le \frac{2}{12 \cdot 400} < 0,0005;$$

$$R_{100} \le \frac{2}{12 \cdot 10^4} < 0,00002.$$

Результаты вычислений по программе:

n	Показания индикатора	Приближенное значение интеграла
10	0,74621079	$0,746 \pm 0,002$
20	0,7466708	$0,7467 \pm 0,0005$
100	0,74681798	$0,74682 \pm 0,00002$

Другой вариант программы без организации цикла:

ПО С/П ПВ П1 ПП39 ПС С/П ПА ПП
39 ИПС– 2 ÷ ПС ИПВИПА– ИПО
÷ ПВ ИПАИПВ+ ПП 39 ИПС+ ПС
ИПАИП1 – $F_{x \ge 0}$ 22 ИПСИПВ× С/ППА
F_{x^2} /–/ Fe^x В/О

n, b, a вводятся в регистр $R_g X$.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Комплект графических калькуляторов (10 на группу)
Тестирование в дисплейном классе (2 раза в семестр)

8. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Какие связи между параметрической, полярной и декартовой системой координат?

2. Верна ли обратная теорема к теореме Ферма?

3. Привести пример непрерывной функции, имеющей бесконечное число точек несуществования производной на конечном отрезке.

4. Дать геометрическую иллюстрацию теоремы Коши.

5. Какие условия необходимы и достаточны для строгого монотонного возрастания (убывания) дифференцируемой функции?

6. Как построить непрерывную кривую, сплошь заполняющую квадрат [0,1; 0,1] на плоскости $\mathbf{R}^2$?

7. Доказать бесконечную дифференцируемость в точке функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \mathrm{x}\neq 0, \\ 0,\ x=0. \end{cases}$$

8. Вывести формулу для $(f_1 : f_2 : \ldots : f_n)'$.

9. Указать элементарные функции, для которых константа в формуле конечных приращений может быть конструктивно определена.

10. Рассмотреть пример функции и ее критической точки, когда неприменимы все 3 достаточных условия существования экстремума.

11. Доказать теорему: для того, чтобы непрерывная на $\mathbf{R}$ функция была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

12. Привести примеры функций, не интегрируемых в элементарных функциях.

13. Можно ли определить интеграл от неограниченной функции? на неограниченном промежутке?

14. Привести пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции.

15. Следует ли из интегрируемости $|f|$ интегрируемость f ?

16. Найти связь между формулой Тейлора и формулой Лагранжа.

17.Найти связь между интегральной теоремой о среднем и дифференциальной теоремой о среднем (формула Лагранжа).

18. Каков геометрический смысл дифференциала дуги ds ?

19. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости ограниченной функции по Риману.

20. Вычислить объем эллипсоида (и, следовательно, шара), конуса, пирамиды; площадь круга (эллипса) и задачи подобного рода, относящиеся к школьной математике.

Примерная тематика рефератов и курсовых работ:
Рефераты (I, II семестры)

Цель: расширение когнитивного опыта в условиях индивидуальной и совместной деятельности принятия решения: сбор данных, выбор, активация мотивационной сферы.

Задачи: углубленное изучение и представление в форме исторического реферата фрагмента курса математического анализа: персоналии, вариативность подходов к проблеме, проработка деталей информационного поля проблемы, расширение банка учебных и творческих заданий, прикладные задачи и использование вычислительных методов и т.п.; осуществление "обучения через выбор"; формирование творческой активности и коммуникативных качеств.

Формы: работа в малых группах (3–4 студента), индивидуальные консультации.

I семестр

1. *Построение графиков функций в полярной системе координат.*
   1. Н.А.Вирченко, И.И.Ляшко, К.И.Швецов. Графики функций: справочник. Киев, Наук. думка, 1979.
   2. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 1. М.: Наука, 2001.
2. *Десять исторических задач, приводящих к понятию производной.*
   1. А.П.Юшкевич. Концепции вычисления бесконечно малых Ньютона и Лейбница // ИМИ, вып. 23, 1978.
   2. Д.Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. М., Мир, 1978.
3. *Функциональные уравнения основных элементарных функций.*
   1. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 1. М.: Наука, 2001.
   2. В.П.Одинец, А.И.Поволоцкий. Построение элементарных функций. СПб., Образование, 1995.
4. *Основные элементарные функции в природе и технике.*
   1. Н.Я.Виленкин. Функции в природе и технике. Книга для внеклассного чтения IX–X классов. М., Просвещение, 1978.
   2. С.Г.Крейн, В.Н.Ушаков. Математический анализ элементарных функций. М., Наука, 1966.
   3. Ф.Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.–Л., Т. 1, 1987.
5. *Системы координат на плоскости и в пространстве.*
   1. Л.С.Понтрягин. Метод координат. М., Наука, 1977.
   2. М.Я.Выготский. Справочник по высшей математике. М., Наука, 1973.
   3. И.М.Гельфанд, Е.Г.Глаголева, А.А.Кириллов. Метод координат. М., 1973.
6. *Трансцендентные числа в анализе.*
   1. В.А.Зорич. Математический анализ. Т. 1, М., Наука, 1983.
   2. Ф.Рудно. Квадратура круга. М.–Л., 1934.
   3. А.О.Гельфонд. Решение уравнение в целых числах. М.–Л., 1952.
   4. А.Я.Хинчин. Три жемчужины теории чисел. М., 1979.

7. *Цепные дроби и их приложения.*

1. А.Я. Хинчин. Цепные дроби. М., Наука, 1978.

2. И.К.Андронов, А.К.Окунев. Арифметика рациональных чисел. М., Просвещение, 1971.

II семестр

Цель: освоение навыков исследовательской деятельности: включенность в математическую проблему, генезис идей и вариативность подходов, сбор данных и перенос знаний, выделение базовых, значимых компонентов проблемы, готовность к принятию нестандартных решений.

Задачи: инновационное самостоятельное решение конкретных математических задач и проблем: новые банки задач и примеров, новые доказательства известных теорем, поиск новых процедур и алгоритмов, интегративные подходы и структурирование математической информации, визуализация математических объектов и т.п.; осуществление совместной творческой деятельности, обмен информацией и распределением ролей в функционировании малых групп, развитие речевой культуры и коммуникативных качеств, наращивание интеллектуального опыта.

Формы: работа в малых группах (3–4 студента), индивидуальные консультации, публичные защиты рефератов-исследований.

1. *Контрпримеры в теории множеств.*

1. Б.Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М., Мир, 1967.

2. К.Куратовский. Теория множеств. М., Мир, 1970.

3. П.Коэн. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., Мир, 1969.

2. *Методы построения графиков функций в параметрических координатах.*

1. Н.А.Вирченко, И.И.Ляшко, К.И.Швецов. Графики функций: справочник. Киев, Наук. думка, 1979.

2. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., Наука, 1969.

3. *Контрпримеры в теории функциональных рядов.*

1. Б.Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М., Мир, 1967.

2. П.И.Шмелев. Теория рядов. М., Наука, 1978.

3. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т. 2. М.: Наука, 2001.

4. *Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка.*

1. Н.М.Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Высшая школа, 1967.

2. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. 1970.

5. *Ортогональные системы функций в анализе.*

1. Г.Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., Иностранная литература, 1963.

2. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Спирали фундирования (III–IV семестры)

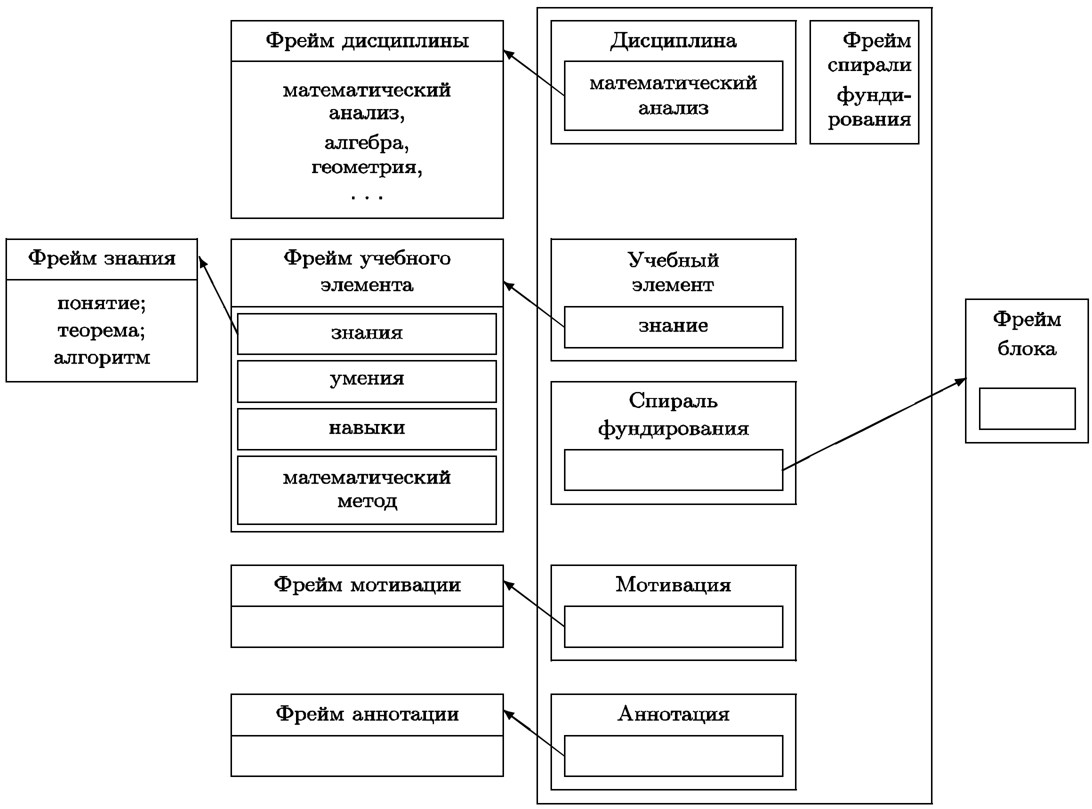
Цель: построение дидактического фрейма спирали фундирования базового учебного элемента (понятия, теоремы, алгоритма, процедуры).

Задачи: освоение структуры и состава дидактического фрейма учебного элемента, мотивационное оснащение блоков спирали фундирования учебного элемента, выделение существенной связи теоретического (эмпирического) обобщения, структурный анализ сфер деятельности (вербальной, знаково-символической, графической, конкретно-деятельностной) с блоками спирали фундирования.

Формы: работа в малых группах (3–4 студента), индивидуальные консультации, обмен информацией между малыми группами, анализ и публичная оценка.

Структура дидактического фрейма

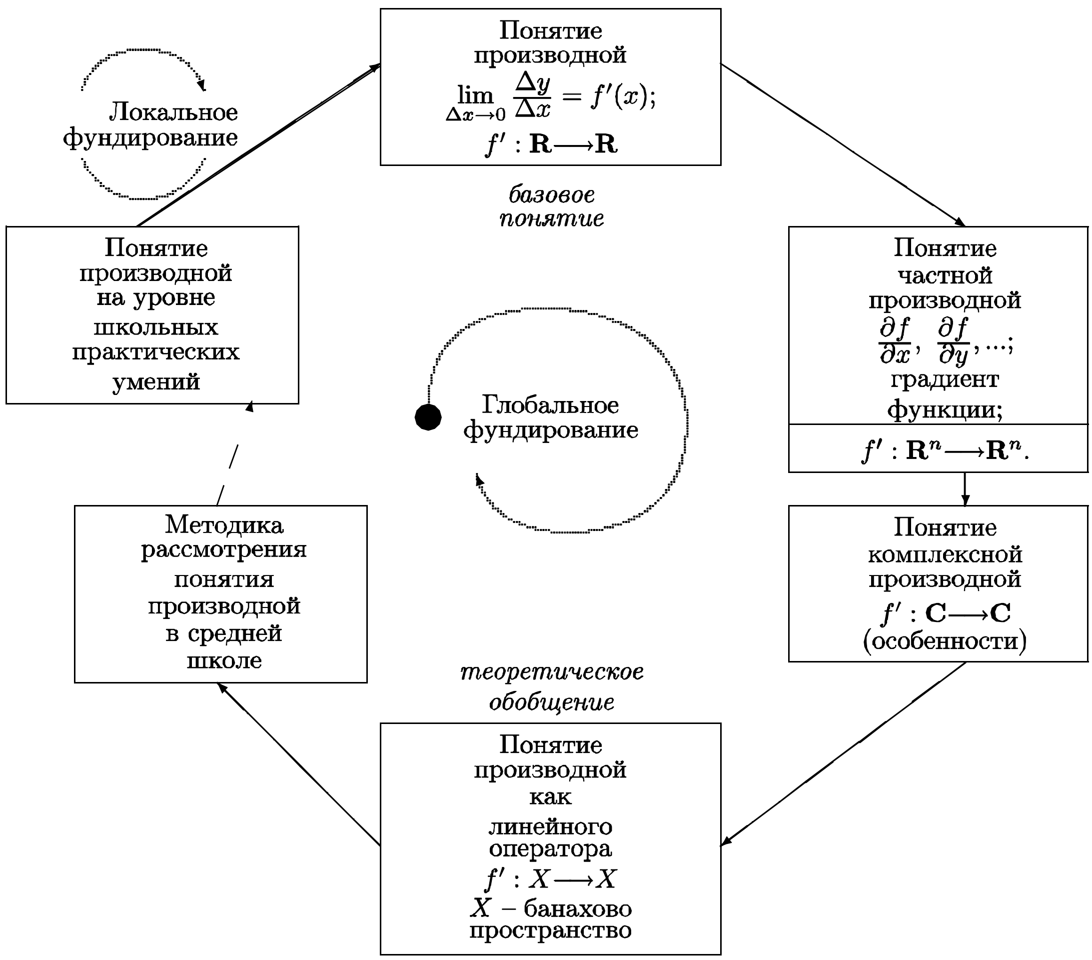
Фрейм представления теоретического обобщения школьного знания (спираль фундирования)



Целостность и направленность проектируемой дидактической системе придает развертывание спиралей фундирования базовых школьных учебных элементов посредством построения родового теоретического обобщения и технологического осмысления видовых его проявлений.

Например, возможна такая цепочка фундирования:

Фундирование школьного знания



В нашем примере необходимо построить теоретическое обобщение производной на уровне банаховых пространств. Пусть X,Y – банаховы пространства, $U\subset X$ – открытое множество в X, $f:U\longrightarrow Y$ и $x_0\in U$. Говорят, что существует производная f' функции f в точке x_0, если выполнено условие (f' – линейный оператор из X в Y)

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h),$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\frac{o(h)}{\|h\|}=0.$

Теперь, если $X=Y=\mathbf{R}$, то f' – одномерная производная (число); если

$X=\mathbf{R}^n$, $Y=\mathbf{R}$, то $f'=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ – градиент функции f в точке x_0, а его компоненты – частные производные f по переменным; если $X=\mathbf{R}$, $Y=\mathbf{R}^n$, то f' – вектор-столбец производных компонентных функций; если $X=Y=\mathbf{C}$, то f' – комплексная производная (комплексное число); если $x=\mathbf{R}^n$, $y=\mathbf{R}^m$, то f' – матрица Якоби.

Существование производной f в точке $p_0\in X$ означает нечто большее, чем просто существование особого вида действительного числа α, вектора $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, комплексного числа (тоже вектора) $\left(\frac{\partial u}{\partial x},-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{ij}$, линейного оператора $A:\Omega\longrightarrow Y$ $(p_0\in\Omega)$. Это прежде всего возможность аппроксимации (приближения) функции f в окрестности точки p_0 линейным отображением. Сущность понятия производной заключена в самой возможности линеаризации функции в окрестности исследуемой точки.

Ценность данной модели фундирования (понятия производной на уровне "данных" до ее глубокого теоретического обобщения на уровне "сущности") для учебного процесса в вузе и будущей профессиональной деятельности для студента-математика несомненна и должна найти определенное место в учебных программах математического анализа и авторских технологиях школьного обучения математике.

В то же время данная модель несет в единичном и особенном своем проявлении все основные черты теоретического знания о процессе фундирования базовых учебных элементов школьной математики. Создание системогенетического блока спиралей фундирования БУЭШМ позволяет определить устойчивое ядро содержания учебной информации, проектирующее элементы ориентировочной основы учебной деятельности студентов.

С другой стороны, проецирование теоретического обобщения (родовое понятие) на видовое разнообразие частных случаев в форме актуализированных практических приложений создает устойчивый мотивационный эффект в процессе усвоения школьного математического знания (в нашем примере – понятия производной).

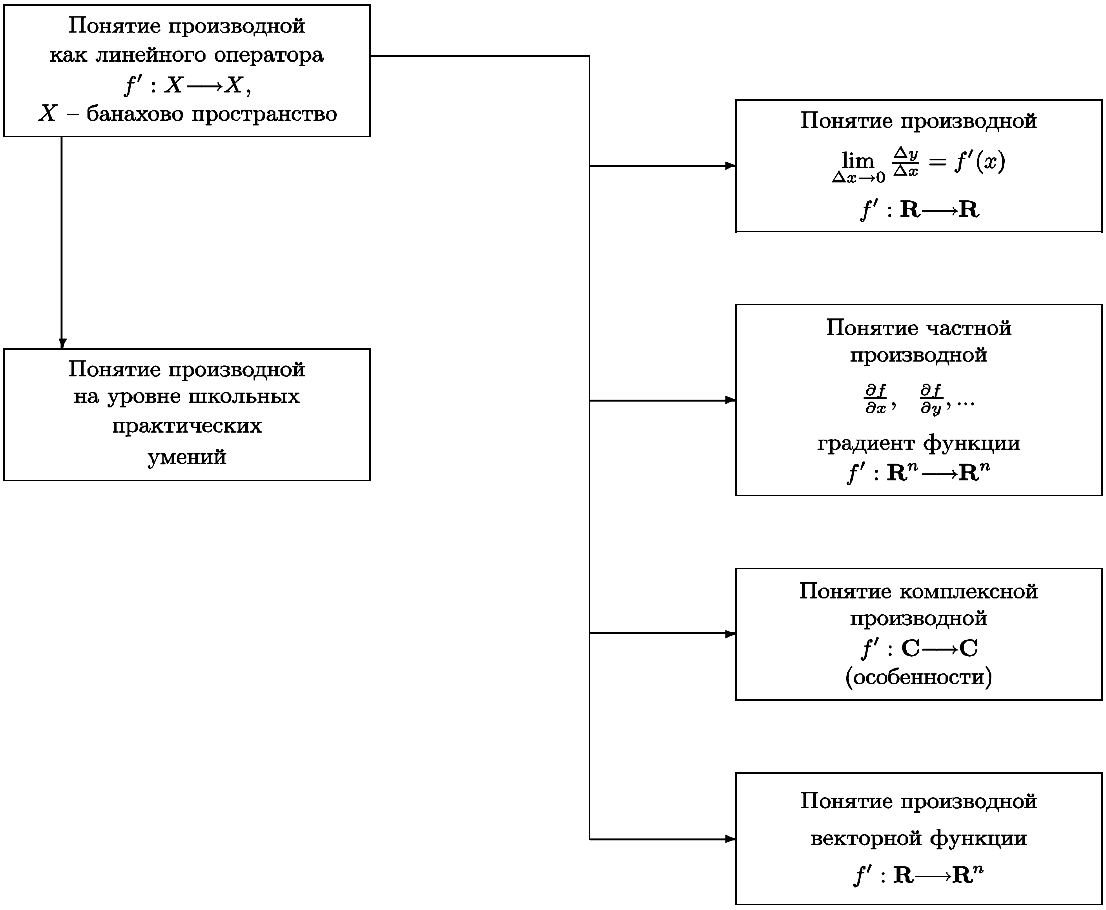


Рис. 3. Видовые проявления родового понятия

Значимость батареи спиралей фундирования по учебным предметам в глобальном аспекте может быть представлена в форме спецсеминара для студентов 5 курса "Технология фундирования базовых учебных элементов школьной математики", а также в качестве основы для исследования в форме курсовых и выпускных квалификационных работ студентов.

Курсовая работа (V–VI семестры)

Цель: расширение научного кругозора, формирование навыков самостоятельного научного исследования, решение конкретных задач и проблем математики.

Задачи: построение альтернативных конструкций доказательств известных теорем, решение проблем визуализации сложных математических объектов, теоретический и практический анализ особенностей и частных проявлений математических знаний.

Формы: выполнение индивидуально или в паре (1–2 человека), индивидуальные консультации с научным руководителем, публичная защита на кафедре.

Цепочки задач учебно- и научно-исследовательского характера

Активному овладению курсом математического анализа, развитию творческой самостоятельности студентов, более глубокому проникновению в качественный анализ основных понятий, методов и теорем математического анализа могут служить приводимые ниже цепочки задач учебно- и научно-исследовательского характера, имеющие непосредственный выход на серьезное математическое исследование. Решение этих задач требует самостоятельных математических рассуждений, ознакомления и проработки научно-методической литературы, умения обрабатывать научную информацию, делать самостоятельные выводы. Каждый цикл представляет собой логическую цепочку заданий, связанную единой опорной идеей, с постепенным накоплением информации о реализации этой идеи. Завершающие задачи цикла могут стать основой курсовых и дипломных работ.

Метод последовательных приближений

1. Доказать, что последовательность, задаваемая рекуррентным соотношением: $x_0 = 1,\ \ x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$, сходится.

2. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{n^k}{a^n}, \quad k \in \mathbf{N}, a > 1;$

б) $x_n = \frac{a^n}{n!}$.

3. Пусть X – n- мерное пространство, в котором расстояние определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} | x_i - y_i |,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Пусть отображение $A : X \longrightarrow Y$ задается системой линейных уравнений

$$y_i = (ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, i = \overline{1, n}.$$

При каких условиях отображение A будет сжимающим, т.е.

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y),$$

где

$$\alpha \in (0,1), x, y \in X.$$

4. При каких значениях параметра λ оператор $F : C \longrightarrow C$, задаваемый формулой

$$F(f)(x) = \lambda \int_a^b \sin(x - y) f(y) dy + \cos x,$$

будет сжимающим? Методом последовательных приближений найти решение уравнения $F(f) = f$.

5. Составить блок-схему, определить метод вычислений и программу на алгоритмическом языке для задачи 4. Обеспечить эффективную оценку погрешности и практически обеспечить заданную точность.

Литература

1. *Бобков В.В., Городецкий Л.М.* Избранные численные методы решения на ЭВМ инженерных и научных задач. Минск, Вышейша школа, 1985.

2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1969.

Компактность

1. Будут ли следующие множества ограничены:

$$\text{а)}\{\sin n\}_{n\in\mathbf{N}},\ \text{б)}\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n\in\mathbf{N}},\ \text{в)}\left\{\frac{n!}{2^n}\right\}.$$

2. Будут ли семейства функций равномерно ограниченными:

$$\text{а)}\left\{f_\alpha(x)=\sin\alpha x, \alpha\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\right\};$$

$$\text{б)}\left\{f_\alpha(x)=e^{\alpha x}, \alpha\in\mathbf{R}, x\in[0,1]\right\};$$

$$\text{в)}\left\{f_\alpha(x)=e^{\alpha x}, \alpha\in[-1,1], x\in[0,1]\right\}.$$

3. Будут ли следующие функции непрерывны, на каких множествах:

$$\text{а)}\ f(x)=\frac{\sin x}{x};\quad \text{б)}\ f(x)=\left(\cos\frac{x}{2}\right);$$

$$\text{в)}\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 4, & x=1.\end{cases}$$

4. Исследовать функции на равномерную непрерывность. Результат обосновать на языке (ε,δ).

$$\text{а)}\ f(x)=\sqrt{x},\qquad (0\le x\le 1);$$

$$\text{б)}\ f(x)=e^x\cos\tfrac{1}{x},\qquad (0<x<1);$$

$$\text{в)}\ f(x)=x\sin x,\qquad (x\ge 0).$$

5. Пусть $F=\{f_1, f_2,..., f_n,...\}$ – некоторое семейство функций. Будет ли F равностепенно непрерывным, если:

а) F состоит из конечного числа равномерно непрерывных функций;

б) $F=\{x, x^{1/2}, x^{1/3},..., x^{1/n},...\}$.

6. С помощью теоремы Арцела определить, являются ли следующие множества функций предкомпактными в равномерной метрике (по $\max$):

а) $\left\{\cos\frac{1}{\alpha}t, 0\le t\le 2\pi\right\}_{\alpha\in\mathbf{R}}$;

б) $\left\{e^{\alpha t}, 0\le t\le 1\right\}_{\alpha\in[0,1]}$.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

2. *Макаров И.П.* Дополнительные главы математического анализа. М., Просвещение, 1966.

Последовательность

1. Пусть $\{x_n\}$ ограниченная последовательность. Следует ли отсюда ее сходимость?

2. Пусть дано бесконечное число последовательностей:

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ – I последовательность,

$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ – II последовательность,

....

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots$ – k последовательность.

Известно, что для любого $k \in \mathbf{N}$ последовательность $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к нулю и для любого $n \in \mathbf{N}$ последовательность $(x_n^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Что можно сказать о сходимости "диагональной" последовательности $(x_i^{(i)})_{i=1}^{\infty}$?

3. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ – какой-нибудь базис пространства $\mathbf{R}^n$, тогда любой элемент последовательности $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ может быть представлен в виде:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{jk} e_j \, (k = 1, 2, \ldots). \qquad (*)$$

Доказать: для того, чтобы последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ сходилась к вектору $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{jk} = \xi_j \, (j = \overline{1,n}).$$

4. Доказать: если все сходящиеся подпоследовательности некоторой ограниченной последовательности (*) имеют один и тот же предел, то и сама последовательность сходится к этому пределу.

5. Пусть f непрерывная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ частичные суммы ряда Фурье функции f. Пусть далее $\lambda_{i,n} > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} = 1$ $(n \in \mathbf{N})$, $\lim_{n\to\infty}\{\max_i \lambda_{i,n}\} = 0$. Доказать, что последовательность функций $\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{in} S_i\}$ сходится равномерно к функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Литература

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1969.

Выпуклость

1. Описать все замкнутые, выпуклые множества на прямой.

2. Пусть F_α – произвольное семейство замкнутых, выпуклых множеств на прямой. Доказать: если любые два множества семейства F_α пересекаются по непустому множеству, то все множества имеют общую точку.

3. Пусть M – замкнутое выпуклое множество на плоскости. Если M –

ограниченное множество, всегда ли проекция M на одну из координатных осей является выпуклым замкнутым множеством? Провести доказательство. Те же вопросы для неограниченного множества M.

4. Пусть F_α – произвольное семейство замкнутых, ограниченных, выпуклых множеств на плоскости. Используя задачу 2, показать, что если любые четыре множества из F_α имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

Указание. Рассмотреть проекции на одну из координатных осей попарных пересечений множеств из F_α.

5. Если пересечение любых трех из $k(k \geq 4)$ ограниченных замкнутых выпуклых множеств на плоскости не пусто, то и пересечение всех k множеств также не пусто (теорема Хелли).

6. Доказать теорему Каратеодори: всякое выпуклое подмножество $M = co\,N$ из $\mathbf{R}^n$ может быть представлено как выпуклая оболочка не более чем $n+1$ точек из N.

Литература

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1976.

Приближение

1. Найти точные нижние и верхние грани следующих множеств:

$$\text{а)}\left\{\frac{n^4}{n^4+1}\right\}_{n\in\mathbf{N}};\quad \text{б)}\left\{\frac{n+1}{n^3+7}\right\}_{n\in\mathbf{N}};\quad \text{в)}\left\{[(-1)^n+1]n+\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

Пусть A – некоторое подмножество метрического пространства X. Через $\rho(x,y)$ будем обозначать расстояние между элементами $x\in X$ и $y\in X$. Наилучшим приближением элемента $x\in X$ элементами множества A называется число

$$e(x;A)=\inf_{a\in A}\rho(x,a).$$

Элемент a_0, на котором достигается точная нижняя грань, называется элементом наилучшего приближения.

Геометрически наилучшее приближение элемента x есть расстояние от x до множества A, а элемент наилучшего приближения – точка $a_0\in A$, ближайшая к X.

2. Пусть A – множество рациональных чисел из $[0,1]$, x – иррациональное число, принадлежащее этому отрезку. Найти наилучшее приближение $e(x,A)$.

3. Пусть $A=\{a\in\mathbf{R}^2 : 2a_1+3a_2=0\}$ – прямая на плоскости. Найти наилучшее приближение для точки $x=(1,2)$ элементами множества A в пространстве $X=\{x=(x_1,x_2);\rho(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$. Найти элемент наилучшего приближения; будет ли он единственным?

4. Найти $e(x;A)$ и элемент наилучшего приближения, используя три способа измерения расстояний на плоскости:

а) $\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$;

б) $\rho_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$;

в) $\rho_3(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$;

если $x=(x_1,x_2)$, $A=\{a=(a_1,a_2):a_1c_1+a_2c_2=0\}$, здесь c_1,c_2 – произвольные действительные числа.

Литература

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Числовые ряды и вероятность

1. Докажите, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots=\frac{1}{4}$.

2. Найдите сумму ряда:

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

3. а) Классический, вероятностный и геометрический способы суммирования геометрической прогрессии.

б) При последовательном вычислении с возвратом из полного набора домино первый поставил на нечетную сумму, а второй на четную. В каком соотношении находятся их шансы на победу?

4. Покажите геометрическим и вероятностным способами, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots=\frac{1}{18}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}+\ldots=\frac{1}{3}$.

5. Найдите вероятностным и геометрическим способами суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+3)!}$;

б) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{10}+\ldots+\frac{3^{n-1}\cdot(3n-2)}{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}+\ldots$

Литература

1. *Афанасьев В.В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996.

Примерный перечень вопросов к экзамену (интегративные учебные элементы).

1. Мощность множества. Шкала мощностей (упорядочение, неограниченность сверху, линейность). Счетные множества. Несчетность континуума.

Построение шкалы мощностей с помощью факторизации по отношению эквивалентности. Теорема Кантора-Бернштейна. Несчетность интервала и всей прямой. Теорема Кантора о высших мощностях. Счетность множества рациональных чисел. Мощности множеств $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{T}$.

2. Аксиоматическое построение множества действительных чисел. Три теории действительных чисел.

Основные группы аксиом: сложение, умножение, порядок, связи, аксиома непрерывности. Лемма Кантора о вложенных отрезках. Натуральные числа, метод математической индукции. Подклассы $\mathbf{R}$ (натуральные $\mathbf{N}$, целые $\mathbf{Z}$, рациональные $\mathbf{Q}$, иррациональные $\mathbf{I}$, алгебраические $\mathbf{A}$, трансцендентные числа), их мощности. Теории действительных чисел Г.Кантора, Р.Дедекинда, К.Вейерштрасса (исторический анализ, различие и взаимосвязи).

3. Принцип Архимеда. Позиционные системы счисления. Двоичная система счисления и ЭВМ.

Формулировка и геометрическая трактовка принципа Архимеда. Приложение принципа Архимеда. Плотность множества $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}$. Рациональное приближение действительных чисел. Позиционная система счисления, взаимный переход из одной системы счисления в другую. Запись информации в память ЭВМ, понятие бита и байта информации.

4. Отображения множеств, типы и классификация. Операции над отображениями $(\pm, \cdot, /, \circ, ()^{-1}, |)$.

Отображение множеств (эволюция понятий, современная трактовка понятия функции). Типы отображений: инъекция, сюръекция, биекция. Классификация отображений: $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$. Операции над отображениями: арифметические, композиции, обращение, сужение, продолжение. Построить непрерывное продолжение показательной функции $exp(x)$ с $\mathbf{Q}$ на $\mathbf{R}$ (провести доказательство непрерывности и теоремы сложения).

5. Основные элементарные функции, множество элементарных функций. Классификация элементарных функций. Неэлементарные функции.

Основные элементарные функции: постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические; графики и основные свойства. Системы координат на плоскости и в пространстве: декартова, полярная, параметрическая, задание элементарных функций, взаимопереход различных систем координат. Мера угла, построение тригонометрических функций (вычисление площади сектора или длины дуги). Многочлены, рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные функции; примеры. Неэлементарные функции; примеры.

6. Элементарные функции в комплексной плоскости.

Основные элементарные функции в комплексной области: $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $f(z)=z^n$, $f(z)=e^z$, $f(z)=\operatorname{Ln} z$, $f(z)=\sin z$, различные подходы к определению, идея аналитического продолжения, свойства. Доказательство формулы $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

7. Аксиоматическое представление основных элементарных функций. Формула и ряд Тейлора.

Линейное, квадратичное, полиномиальное приближение основных элементарных функций. Формулы Лагранжа и Тейлора, ряд Тейлора. Остаточные члены в форме Пеано и Лагранжа. Разложение основных элементарных функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$. Единственность разложения в ряд Тейлора.

8. Предел функции в точке a. *Пространство* Lim_a. *Односторонние и бесконечные пределы. Признаки существования предела. Замечательные пределы.*

Предел функции в точке (окрестностное определение), $(\varepsilon - \delta)$-язык, язык последовательностей (по Гейне). Эквивалентность $(\varepsilon - de)$-языка и языка Гейне. Предел последовательности. Алгебраическая структура $(\pm, \cdot, /)$ и структура отношения порядка $\leq$ на множестве Lim_a. Замечательные пределы, число e. Признаки существования предела.

9. Топология числовой прямой. Окрестность точки в $\mathbf{R}$. *Строение открытых и замкнутых множеств в* $\mathbf{R}$.

Окрестность точки в $\overline{\mathbf{R}}$. Отделимость окрестностей. Классификация точек: предельная, внутренняя и граничные точки множества. Строение открытых и замкнутых множеств в $\mathbf{R}$. Методы решения неравенств, содержащих модуль.

10. Метрические пространства ($\mathbf{R}^n$, $C_{[a;b]}$, $C^1_{]a;b[}$, $c^\infty_{]a;b[}$). *Сходимость в метрическом пространстве. Полные метрические пространства. Метод последовательных приближений.*

Метрические пространства; примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Покоординатная сходимость, равномерная сходимость. интегральная сходимость; примеры. Теорема Банаха. Сжимающие операторы в $\mathbf{R}$, приложение к приближенному решению уравнения $F(x) = 0$. Вычисление $\sqrt{a}$ методом последовательных приближений.

11. Непрерывность функции в точке метрического пространства. Алгебраическая структура и полнота пространства $C_{[a;b]}$.

Непрерывность функции в метрическом пространстве $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Непрерывность основных элементарных функций; Алгебраическая структура $(\pm, \cdot, /)$ и полнота пространства $C + [a;b]$ в равномерной метрике. Использование непрерывности при нахождении предела функции.

12. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Метод Больцано.

Теоремы Больцано-Коши и Вейерштрасса, непрерывность композиции и обращение (доказательство теоремы Больцано-Коши методом Больцано). Доказательство включения $C^1_{]a;b[} \subset C_{]a;b[}$. Примеры непрерывных. но не дифференцируемых функций с доказательством.

13. Задачи, приводящие к понятию производной. Дифференциал функции. Пространство $C^1_{]a;b[}$.

Задачи о касательной, о плотности, о скорости с обоснованием.

Исторические подходы к введению производной (Ньютон, Лейбниц). Дифференциал функции как средство приближенного выражения приращения функции, его геометрический и механический смысл. Производные основных элементарных функций, использование цепного правила дифференцирования и производной обратной функции. Алгебраическая структура пространства $C^1_{]a;b[}$.

14. Развитие понятия производной: $f'\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f'\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $f'\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f'\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. *Условие дифференцируемости функции.*

Развитие понятия производной (число, вектор-функция, градиент, оператор), определения и взаимосвязи. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции комплексного переменного. Примеры производной на каждый случай. Геометрический и физический смысл производных.

15. Исследование функции на экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывно дифференцируемой на отрезке.

Локальный и глобальный экстремумы функции; определение и примеры в $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$, $\mathbf{C}$). Необходимое (теорема Ферма) и 3 достаточных условия существования экстремума в $\mathbf{R}$. Стационарные и критические точки функции; примеры в $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$. Метод наискорейшего спуска для $\mathbf{R}^2$ (алгоритм). Нахождение $\max f$ и $\mathrm{mix}\, f$ ($f \in C^1_{]a;b[}$).

16. Интегрирование как обратная операция к дифференцированию. Формула Ньютона-Лейбница. Техника неопределенного интегрирования.

Задача восстановления F из выражения $dF(x) = F'(x)dx$, обращение дифференциального оператора $\frac{d}{dx}\colon C^1 \to \mathbf{C}$, линейность и структура ядра N оператора $\frac{d}{dx}$. Существование $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\colon C \to C^1/N$, линейность и обратимость $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$, обозначение $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} = \int \underbrace{\quad\quad}\, dx$, геометрический и физический смысл первообразной, основная теорема интегрального исчисления. Техника неопределенного интегрирования (по частям, подстановка, интегрирование рациональных функций); примеры.

17. Задачи, приводящие к понятию интеграла. Интеграл Римана. Класс интегрируемых функций.

Метод бесконечно малых. Задачи о площади плоской фигуры, о длине дуги, об объеме тела, о работе силового поля, о массе линейного стержня. Интеграл Римана. Класс L интегрируемых функций (алгебраическая структура, отношение порядка), аддитивность и монотонность интеграла Римана; примеры. Пример неинтегрируемой по Риману функции. Методика применения определенного интеграла к решению практических задач.

18. Равномерная сходимость функционального ряда. Методы разложения элементарных функций. Определение $\sin$ *и* $\cos$.

Равномерная сходимость – сходимость в метрике $C_{[a;b]}$. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся рядов. Почленное дифференцирование и интегрирование функционального ряда. Методы разложения элементарных функций в функциональный ряд (геометрическая прогрессия, $\frac{d}{dx}$, $\int$).

Числа e, π, $\ln n$ (вычисление и оценка погрешности). Определение $\sin$ и $\cos$ посредством функционального ряда.

19. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Применение к колебательным процессам.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (однородные и неоднородные). Структура общего решения. Задача Коши и единственность ее решения. Геометрическое и физическое истолкование начальных условий. Нахождение общего решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$. Исследование решения дифференциального уравнения колебательного процесса (свободные и вынужденные колебания, резонанс).

20. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теорема Пикара. Дифференциальные уравнения основных элементарных функций.

Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Постановка задачи Коши, геометрический и физический смысл. Теорема Пикара для уравнения $y' = f(x, y)$ методом последовательных приближений. Функциональные и дифференциальные уравнения основных элементарных функций и их решения методом функциональных рядов.