УДК 512

Косарева А.А.,
студентка ФГБОУ ВО «ХГУ им. Н.Ф. Катанова»,
г. Абакан, Россия
Научный руководитель:
Бобылева О.В., кандидат физико-математических наук

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КАК МЕТОД РАЗВИТИЯ СУБЪЕКТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Развитие субъективности обучающихся является важной задачей образования. Иррациональные уравнения можно решать с помощью большого спектра различных методов, тем самым давая обучающимся возможность субъектного выбора более удобного для них способа решения.

Применение двойной подстановки к иррациональным уравнениям позволяет обойтись без возведения уравнения в степень [2]. В решение иррациональных уравнений предлагается приведением к системе рациональных уравнений или умножением на сопряженное выражение [5]. Существуют нетрадиционные способы решений иррациональных уравнений, основанные на применении неравенств Коши и Бернулли [3]. В статье рассматривается метод решения иррациональных уравнений, основанный на элементарных симметрических многочленах.

Существуют многочлены от нескольких переменных, которые не меняются ни при какой перестановке неизвестных. Эти многочлены называются симметрическими многочленами или симметрическими функциями. Простейшими примерами будут:

- сумма всех неизвестных $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$,
- сумма квадратов неизвестных $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$,
- произведение неизвестных $x_1 x_2 \cdots x_n$ и т.д.

В связи с представимостью всякой перестановки n символов в виде произведения транспозиции, при доказательстве симметричности некоторого многочлена достаточно проверить, что он не меняется ни при какой транспозиции двух неизвестных. Сумма, разность и произведение двух симметрических многочленов сами будут симметрическими многочленами [4].

Среди симметрических многочленов от n неизвестных, выделяют n элементарных симметрических многочленов. Эти многочлены имеют широкое применение в теории симметрических многочленов.

Степенной суммой степени k от n переменных $x_1,\ x_2, \cdots, x_n$, называют выражение

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k.$$

Орбитой одночлена $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ называют сумму всех одночленов, получаемых из $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ перестановками переменных [1].

В частности, $s_k = O(x_1^k)$.

Орбита одночлена порождается любым из входящих в нее одночленов.

Для определения элементарных симметрических многочленов от нескольких переменных, укажем элементарные симметрические многочлены в случае трех переменных:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3,$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$

$\sigma_3 = x_1x_2x_3.$

Первый из них является суммой всех переменных x_1, x_2, x_3, т.е. орбитой одночлена x_1: $\sigma_1 = O(x_1)$. Второй многочлен получается из одночлена x_1x_2 путем всевозможных перестановок двух переменных и суммирования полученных результатов: $\sigma_2 = O(x_1x_2)$. Третий многочлен σ_3 является орбитой одночлена $x_1x_2x_3$.

По аналогии распишем элементарные симметрические многочлены для случая нескольких переменных:

$\sigma_1 = O(x_1),$

$\sigma_2 = O(x_1x_2),$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$\sigma_k = O(x_1x_2 \cdots x_k),$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$\sigma_n = O(x_1x_2 \cdots x_n).$

Следовательно, число элементарных симметрических многочленов равно числу переменных.

В развернутом виде многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ выглядят следующим образом [1]:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$

$\sigma_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_ix_j,$

$\sigma_3 = \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i<j<l}}^{n} x_ix_jx_l,$

$\sigma_k = \sum_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k=1 \\ i_1<i_2<\cdots<i_k}}^{n} x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k},$

$\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n.$

Рассмотрим примеры применения элементарных симметрических многочленов для решения иррациональных уравнений.

1. Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$$

Пусть $\sqrt[4]{x} = y$, $\sqrt[4]{97 - x} = z$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид: $y + z = 5.$

С другой стороны, имеем:

$y^4 + z^4 = x + (97 - x) = 97.$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$$

Введем новые неизвестные: $\sigma_1 = y + z$, $\sigma_2 = yz$. $y^4 + z^4$ можно заменить на $\sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2$.

С другой стороны, говоря о субъективном выборе обучающихся, можно предложить другую замену: $y^4 + z^4 = O(y^4 z^0)$ или $y^4 + z^4 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2$.

Для дальнейшего решения иррационального уравнения выберем, например, первую вариацию замены неизвестных.

Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

Решать данную систему уравнений будем подстановкой значения σ_1 во второе уравнение.

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0$$

Возможность выбора решения данного квадратного уравнения с помощью дискриминанта или теоремы Виета. Получаем $\sigma_2 = 6, \sigma_2{}' = 44$. Таким образом, решение иррационального уравнение сводится к решению двух несложных систем уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases}$$

Первая система уравнений имеет два решения: $y_1 = 3, z_1 = 2$ и $y_2 = 2, z_2 = 3$. Вторая система действительных корней не имеет. Далее необходимо вернуться к первоначальной замене. Получаем $x_1 = 81, x_2 = 16$. Таким образом, были найдены все корни иррационального уравнения.

С методической точки зрения решение иррациональных уравнений с помощью элементарных симметрических многочленов заключается в замене иррациональных выражений в исходном уравнении, с составлением системы уравнений, относительно которой вводятся элементарные симметрические многочлены. Дальнейшее решение иррационального уравнения сводится к решению нескольких систем уравнений и возврату к первоначальной замене.

Но, стоит отметить, что разобранное решение не является единственным. Решение данного иррационального уравнения возможно, например, с помощью замены и возведения обеих частей уравнения в степень.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1$$

Пусть $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = y$, $\sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = z$

Тогда исходное уравнение можно переписать в виде $y + z = 1$. С другой стороны, имеем: $y^5 + z^5 = 1$.

$y^5 + z^5$ можно расписать с помощью элементарных симметрических многочленов как $\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$ или $O(y^5 z^0)$. Выбирая, например, первую замену, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 1 \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем $\sigma_2 = 0, \sigma_2' = 1$. Следовательно, решение иррационального уравнения сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ yz = 0 \end{cases}, \begin{cases} y + z = 1 \\ yz = 1 \end{cases}$$

из которых получаем $y_1 = 1, z_1 = 0, y_2 = 0, z_2 = 1$. Возвращаясь к первоначальной замене, получаем $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$.

Элементарные симметрические многочлены являются лишь одним из способов решения иррациональных уравнений. Именно выбор более удобного подхода для решения одного и того же иррационального уравнения является перспективным приемом индивидуализации образовательного процесса и позволяет развивать субъективность обучающихся в информационной образовательной среде.

Литература

1. Болтянский В.Г., Симметрия в алгебре / Болтянский В. Г., Виленкин Н.Я. М., 2002. 240 с.
2. Гузаиров Г.М. Двойная подстановка в иррациональных уравнениях // Мир науки, культуры, образования. 2020. Вып. 5. С. 1.
3. Исакова М.М. Нетрадиционные методы решений иррациональных уравнений/ М.М. Исакова, Р.Г. Тлупова, Ф.А. Эржибова, А.С. Ибрагим// Вестник Челябинского государственного педагогического университета. 2018. Вып. 3. С. 15.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 2016. 432с.
5. Останов К. О некоторых нестандартных способах решения иррациональных уравнений / К. Останов, Б.У. Мамиров, В.У. Актамова// Academy. 2019. Вып. 7. С. 21.