Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный педагогический университет
им. К.Д.Ушинского

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор по учебной работе
____
«___» ________________ 2005 г.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Спецкурс «Обобщенные функции» (I часть)

Составитель: профессор Е.И.Смирнов

Утверждена на заседании кафедры
математического анализа
Протокол № __ _________ 2005 г.

Зав. кафедрой мат. анализа
__________ профессор Е.И.Смирнов

Ярославль 2005

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.

Вариационное исчисление выступает не только как область математики, но и как летопись математических понятий; и в этом отношении ни одна область математики не идет ни в какое сравнение с вариационным исчислением. Многие понятия современного анализа впервые возникли (в менее элегантной форме) в вариационном исчислении. Так, ряд основных средств современной математики – обобщенные функции («распределения») Л.Шварца – С.Соболева, неравенство Юнга, выпуклые фигуры и их поляры, теория Морса, принципы Дирихле в теории потенциала и др. – можно в зачаточной форме обнаружить в классических методах вариационного исчисления. Рождение теории обобщенных функций в классических работах Л.Шварца и С.Л.Соболева обязано классическим задачам теоретической физики (δ-функция П.Дирака, квантовая теория поля, задача Коши для гиперболического уравнения и др.), но с начала 50-х годов XX столетия приобрело стройный функционально-аналитический характер. Теория обобщенных функций позволила развить такие разделы математики как: локально выпуклые производные, дифференциальные уравнения в частных производных, гомологическая алгебра, теория меры, ряды и преобразования Фурье и Лапласа, алгебра голоморфных функций, уравнения в сверточных алгебрах и др.

Студент должен освоить основные идеи и мотивы расширения классического понимания функции, уметь приводить примеры обобщенных функций и знать их свойства, понимать топологические конструкции в пространствах основных и обобщенных функций.

2. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Вид занятий	**Всего часов**
Общая трудоемкость (по ГОС ВПО)	44
Аудиторные занятия	22
Лекции	22
Практические занятия	-
Лабораторные работы	-
Самостоятельная работа	22
Другие виды работы	-
Форма итогового контроля	зачет

3. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

коллоквиум – 2;
вид итогового контроля – зачет

3.1. Содержание разделов дисциплины

№	Содержание учебных дисциплин	Лек	ПЗ	ЛЗ	Ресурсный материал
1.	Вариация функционала и ее свойства. Необходимое условие существования экстремума. Слабый дифференциал Гато. Производная Фреше в банаховом пространстве. Связь между производной Фреше и слабой производной Гато.	2			
2	Исследования на экстремум функционала $J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} F(x_1 y(x), y^{/}(x))\, dx$ Условие однородности для случая параметрического задания функций. Необходимые условия экстремума для функционала J(y). Основная лемма вариационного исчисления. Экстремали уравнения Эйлера и стационарные точки интегрального функционала.	2			
3	Экстремали в классических задачах (кратчайшее расстояние, брахистохрона, минимальная поверхность вращения). Лемма Эйлер-Лагранжа и обобщенные функции Л.Шварца. Уравнение трансверсальности.	4			
4	Задачи, приводящие к понятию обобщенной функции (мгновенный удар, плотность материальной точки). Дельта-функция Дирака как линейный функционал (δ, φ)=φ(0). Плотность распределения точечных масс $\sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta(x-x_k)$.	2			
5	Пространство основных функций D (Ω) (бесконечно дифференцируемых финитных функций на открытом множестве Ω < R^n). Топология и сходимость в пространстве D(R).	4			

6	Локально конечное покрытие открытого множества в R^n. Разложение единицы. Регуляризация локально интегрируемой функции. Плотность D (Ω) в $L^p(\Omega)(1\leq p< +\infty)$	4			
7	Пространство обобщенных функций $D^1(\Omega)$. Сходимость в $D^2(\Omega)$. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций.	4			

5. УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. т.П,, М., Высшая школа, 2003, 470 с.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука, 2006, 280 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2006.
4. Смирнов Е.И. Хаусдорфовы спектры в функциональном анализе. Ярославль, 1994, 177 с.

Дополнительная литература:

1. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, М., Мир, 1974, 488 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 1969, 425 с.
3. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Л., 1980, 288 с.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М., Мир, 1967, 624 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. т. 1, М., Мир, 1977, 357 с.

6. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Функционалы на пространствах функций. Примеры. Нормы на функциональных пространствах. Непрерывные функционалы. Вариация функционала и ее свойства. Слабый дифференциал и производная Гато.
2. Производная Фреше в банаховом пространстве. Связь между производной Фреше и слабой производной Гато.
3. Экстремумы функционалов. Сильные и слабые экстремумы. Исследование на экстремуме функционала $J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} F(x_1 y(x), y'(x))\,dx$. Условие однородности для случая параметрического задания функций. Необходимые условия экстремума для функционала J(y).
4. Основная лемма вариационного исчисления. Экстремали уравнения Эйлера и стационарные точки интегрального функционала.
5. Экстремали в классических задачах (кратчайшее расстояние, брахистохрона, минимальная поверхность вращения).

6. Лемма Эйлера-Лагранжа и обобщенные функции Л.Шварца. Уравнение трансверсальности.
7. Задачи, приводящие к понятию обобщенной функции (мгновенный удар, плотность материальной точки). Дельта-функция Дирака как линейный функционал $(\delta, \varphi)=\varphi(0)$. Плотность распределения точечных масс
$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta(x-x_k).$$
8. Пространство основных функций $D(\Omega)$ (бесконечно дифференцируемых финитных функций на открытом множестве $\Omega < R^n$). Линейная структура и локально выпуклые топологии на $D(\Omega)$.
9. Характеризация сходимости последовательности основных функций в. Строгий индуктивный предел пространств Фреше.
10. Локально конечное покрытие открытого множества в R^n. Разложение единицы в $D(\Omega)$.
11. Регуляризация локально интегрируемой функции. Плотность $D(\Omega)$ в $L^p(\Omega)(1\leq p< +\infty)$.
12. Пространство обобщенных функций $D^1(\Omega)$, Ω- открытое подмножество R^n. Локально выпуклые топологии в $D^1(\Omega)$.
13. Сходимость в $D^1(\Omega)$. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций.
14. Полнота пространств $D(\Omega)$ и $D^1(\Omega)$.

7. ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Определить условия для существования произведения $f_{/}\, q \in D^1(\Omega)$. Рассмотреть контрпримеры и частные случаи (например, произведение бесконечно дифференцируемой и обобщенной функции).
2. Найти характеристику обобщенной функции с точечным носителем.
3. Построить пример сверточной алгебры из обобщенных функций.
4. Построить теорию обобщенных функций как слабых пределов локально суммируемых функций в $\Omega < R^n$.
5. Построить контрпример локально суммируемой функции на $\Omega < R^n$ не являющейся обобщенной функцией из $D'(R^n)$.