ПРИЛОЖЕНИЕ 1

АТЛАС ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КАРТ ИННОВАЦИОННОГО ПОДХОДА К ИЗЛОЖЕНИЮ КУРСА ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Технологическая карта

Анализ геометрических задач

1. Расчет размерности множества искомых объектов, инцидентных трехмерному евклидову пространству.

2. Расчет размерности геометрических условий, заданных в задаче.

3. Проверка ***необходимого условия*** достаточности исходных данных или корректности сформулированных условий задачи.

4. Проверка ***достаточного условия*** данных задачи на критерий совместности заданных условий.

5. Определение числа решений задачи или размерности и алгебраических характеристик искомого объекта.

6. Выполнение конструирования графо-математических алгоритмов решения задачи, исходя из анализа данных условий и множеств, ими определяемых.

Этап №1. Расчет размерности множества искомых объектов, инцидентных трехмерному евклидову пространству

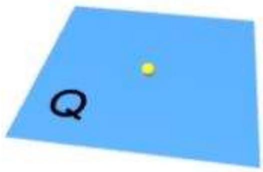
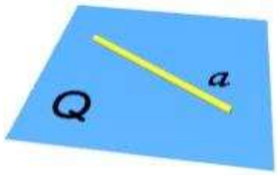
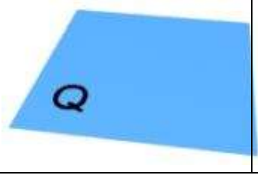
1) **Искомый объект – линейный**:

$$D_n^m = (n-m)(m+1),$$

где n – размерность пространства, в котором рассматривается грассманово многообразие, m – размерность плоскости (элемента), образующей грассманово многообразие.

Таблица 1

Размерность линейных геометрических объектов, евклидова пространства E_3

Элемент грассманова многообразия	Содержащее пространство					
	1-плоскость (прямая)		2-плоскость (обычная плоскость)		3-плоскость (пространство)	
	иллюстрация	D	иллюстрация	D	иллюстрация	D
Точка		1		2		3
Прямая	–	$\varnothing$		2		4
Плоскость	–	$\varnothing$	–	$\varnothing$		3

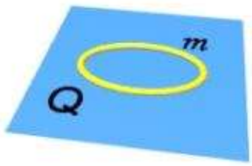
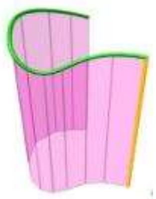
2) **Искомый объект – нелинейный**:

$$L_{n-1}^m = \frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=1}^{n} (m+i) - 1,$$

где m – порядок алгебраической кривой линии, n – размерность пространства.

Таблица 2

Размерность нелинейных геометрических объектов евклидова пространства E_3

Криволинейный объект	Содержащее пространство			
	2-плоскость (обычная плоскость)		3-плоскость (пространство)	
	иллюстрация	D	иллюстрация	D
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Коника		5		8
Квадрика	–	∅		9

3) **Искомый элемент – шубертово многообразие**:

$$Q_{об} = \sum_{i=0}^{m} a_i - \frac{1}{2} m(m+1)$$

4) **Искомый объект – сочетаний шубертовых многообразий**:

$$Q_{сум} = \sum_{i=0}^{k_j} r_j [a_i - \frac{1}{2} m(m+1)]$$

5) **Искомый объект – сочетание множеств линейных объектов**:

$$D_{сум} = \sum_{i=1}^{p} r_i D_{n_i}^{m_i}$$

где r_i – число основных объектов, $D_{n_i}^{m_i}$ – размерность грассманова многообразия m_i – основных объектов, принадлежащих n_i плоскостям (пространствам), p – число различных основных объектов.

Этап №2. Расчет размерности геометрических условий

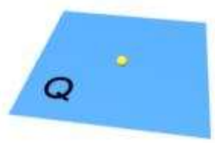
1) **Обобщенное условие инцидентности**:

$$Q_{об} = \frac{(2n-m)(m+1)}{2} - \sum_{i=0}^{m} a_i ,$$

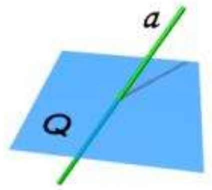
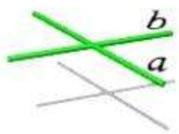
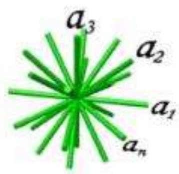
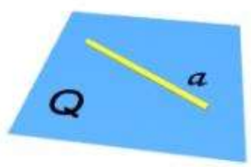
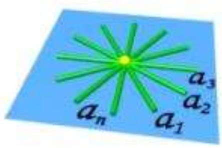
где n – размерность пространства, в котором рассматривается инцидентность, m – размерность плоскости (элемента), удовлетворяющей обобщенному условию инцидентности, a_i – нижние индексы в символьной интерпретации условия инцидентности.

Таблица 3

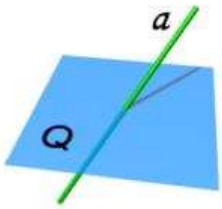
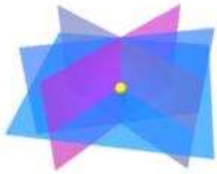
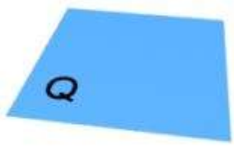
Размерности условий инцидентности
основных геометрических объектов евклидова пространства E_3

Символь-ное обо-значе-ние	Содержание условия инци-дентности	Иллюстрация условия	Размер-ность
1	**2**	**3**	**4**
	Точка		
e_3^0	– принадлежность точки 3-плоскости (пространству)		0
e_2^0	– принадлежность точки 2-плоскости (плоскости)		1
e_1^0	– принадлежность точки 1-плоскости (прямой)		2

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4
e_0^0	– абсолютное условие – совпадение точки с точкой		3
	Прямая		
$e_{3,2}^{1,0}$	– условие пересечение прямой и плоскости		0
$e_{3,1}^{1,0}$	– условие пересечения прямых пространства		1
$e_{3,0}^{1,0}$	– условие прохождения множества прямых через заданную точку пространства – ***связка прямых***		2
$e_{2,1}^{1,0}$	– условие принадлежности прямых заданной плоскости – ***плоское поле прямых***		2
$e_{2,0}^{1,0}$	– условие прохождения множества прямых плоскости через заданную точку – ***пучок прямых***		3
$e_{1,0}^{1,0}$	– абсолютное условие – совпадение прямой с прямой		4

Окончание таблицы 3

1	2	3	4
Плоскость			
$e_{3,2,1}^{2,1,0}$	– условие пересечения плоскости с прямой		0
$e_{3,2,0}^{2,1,0}$	– условие прохождения множества плоскостей пространства через заданную точку – ***связка плоскостей***		1
$e_{3,1,0}^{2,1,0}$	– условие прохождения множества плоскостей пространства через заданную прямую – ***пучок плоскостей***		2
$e_{2,1,0}^{2,1,0}$	– абсолютное условие – совпадение плоскости с плоскостью		3

2) **Условие параллельности**:

$$Q_{//} = p_{//} \cdot m(n - m - q + p_{//} \cdot m),$$

где $p_{//} = \dfrac{r+1}{m}$ – значение степени параллельности, r – размерность общего несобственного элемента двух параллельных элементов, n –

размерность пространства, в котором рассматривается условие параллельности, m и q – размерности параллельных элементов, причем $m \le q$.

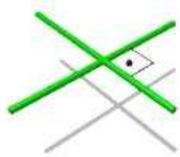
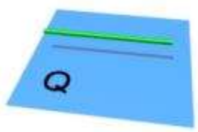
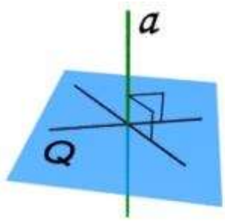
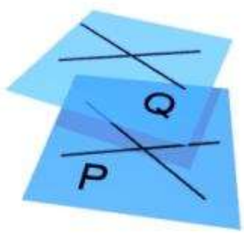
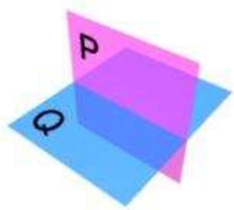
3) **Условие перпендикулярности**:

$$Q_{\perp} = p_{\perp} \cdot m(q - m + p_{\perp} \cdot m),$$

где $p_{\perp} = \dfrac{r+1}{m}$ – значение степени перпендикулярности, r – размерность общего несобственного элемента двух параллельных элементов, m и q – размерности перпендикулярных элементов, причем $m \le q$.

Таблица 4

Размерности условий параллельности и перпендикулярности основных геометрических объектов евклидова пространства E_3

Условие	параллельности		перпендикулярности	
	иллюстрация	размерность	иллюстрация	размерность
двух прямых		1		1
прямой и плоскости		1		2
двух плоскостей		2		1

Этап №3. Проверка необходимого условия существования решения сформулированной задачи

1) Если размерность искомого объекта равна сумме размерностей заданных условий, то задача сформулирована корректно.

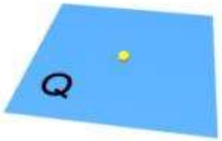
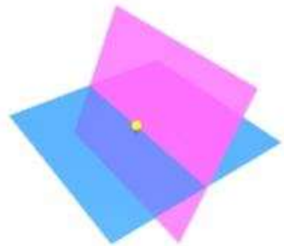
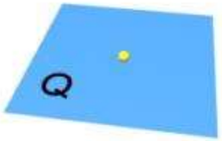
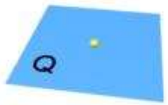
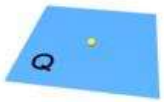
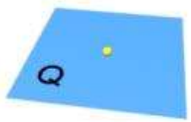
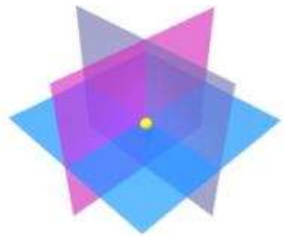
2) Если размерность искомого объекта больше суммы размерностей заданных геометрических условий, то такая задача не имеет решений, т.к. заданных условий недостаточно.

3) Если суммарная размерность условий больше размерности искомого объекта, то условий в задаче перезадано, то есть их больше, чем требуется для решения задачи.

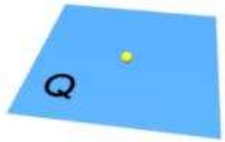
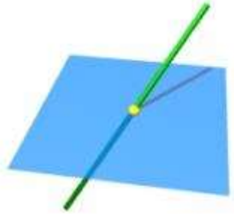
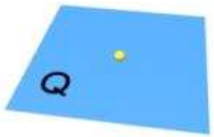
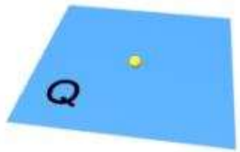
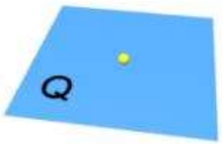
Этап №4. Проверка достаточного условия по критерию совместности заданных условий

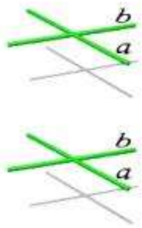
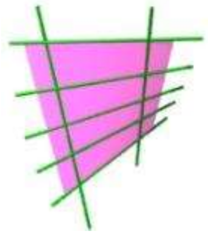
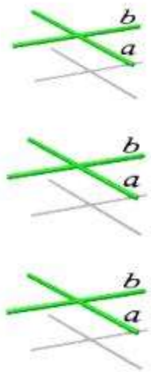
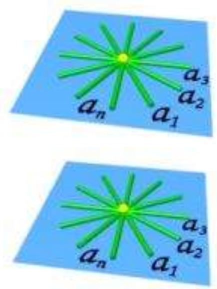
Таблица 5

Размерности произведений условий и их редукция

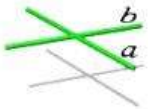
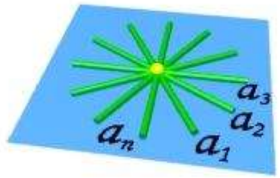
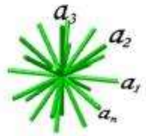
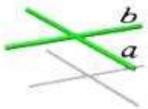
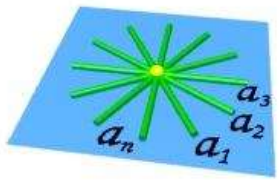
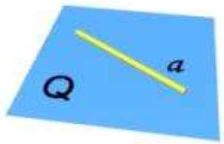
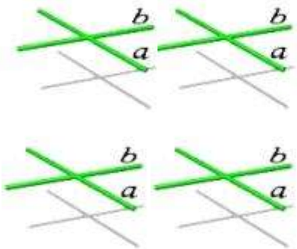
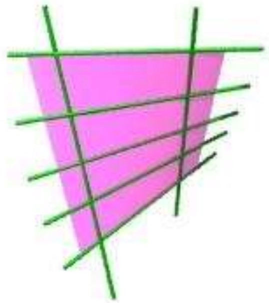
Произведение условий	Условия	Иллюстрация условий	Размерность произведения	Редукция	Интерпретация условий	Иллюстрация интерпретации
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Возможные условия для точки						
$e_2^0 \cdot e_2^0 = (e_2^0)^2$	– точка плоскости		1+1=2	e_1^0	– точка на линии пересечения заданных плоскостей	
	– точка плоскости					
$(e_2^0)^3$	– точка в трех различных плоскостях	  	1+1+1=3	e_0^0	– точка, например, начало координат для трех плоскостей проекций	

Продолжение таблицы 5

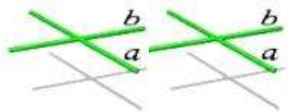
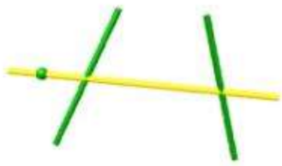
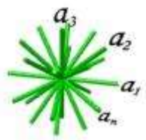
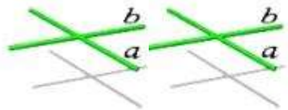
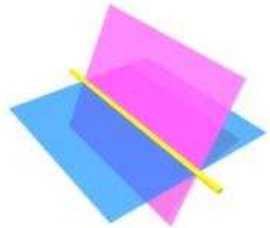
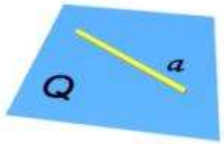
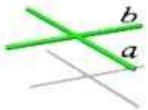
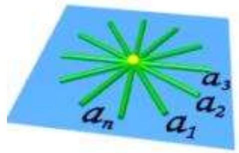
1	2	3	4	5	6	7
$e_2^0 \cdot e_1^0$	– точка плоскости		1+2=3	e_0^0	– точка пересечения прямой и плоскости	
	– точка прямой					
$e_2^0 \cdot e_0^0$	– точка плоскости		1+3=4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
	– совпадение точки с точкой					
$(e_1^0)^2$	– точка на двух прямых, не лежащих в одной плоскости		2+2=4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
$e_3^0 \cdot e_2^0$	– точка пространства		0+1=1	e_2^0	*Условия тождественны*	
	– точка плоскости					

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_3^0 \cdot e_1^0$</td><td>– точка пространства</td><td></td><td rowspan="2">0+2=2</td><td rowspan="2">e_1^0</td><td rowspan="2">Условия тождественны</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– точка прямой</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_3^0 \cdot e_0^0$</td><td>– точка пространства</td><td></td><td rowspan="2">0+3=3</td><td rowspan="2">e_0^0</td><td rowspan="2">Условия тождественны</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– совпадение точки с точкой</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Возможные условия для прямой</td></tr>
<tr><td>$(e_{3,1}^{1,0})^2$</td><td>– прямая, пересекающая две заданные прямые</td><td></td><td>1+1=2</td><td>$e_{3,0}^{1,0} + e_{2,1}^{1,0}$</td><td>– связка прямых и плоское поле прямых</td><td></td></tr>
<tr><td>$(e_{3,1}^{1,0})^3$</td><td>– прямая, пересекающая три заданные прямые</td><td></td><td>1+1+1=3</td><td>$2 \cdot e_{2,0}^{1,0}{}^*$</td><td>– два пучка прямых</td><td></td></tr>
</table>

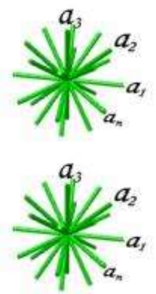
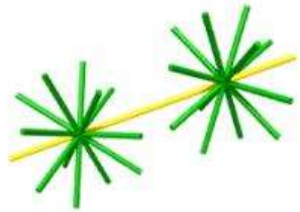
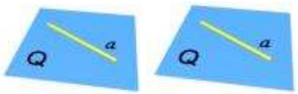
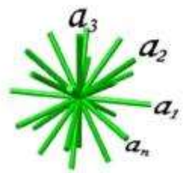
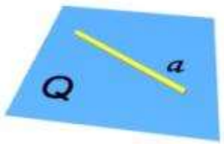
Продолжение таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
$e_{3,1}^{1,0} \cdot e_{3,0}^{1,0}$	– пересекающиеся прямые		1+2=3	$e_{2,0}^{1,0}$	– пучок прямых	
	– прямая, проходящая через точку					
$e_{3,1}^{1,0} \cdot e_{2,1}^{1,0}$	– пересекающиеся прямые		1+2=3	$e_{2,0}^{1,0}$	– пучок прямых	
	– плоское поле прямых					
$(e_{3,1}^{1,0})^4$	– пересечение четырех заданных прямых прямыми пространства		1+1+1+1= =4	$2 \cdot e_{1,0}^{1,0\,**}$	– две прямые линии, пересекающие заданные прямые	

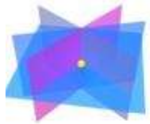
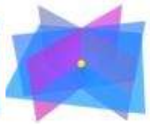
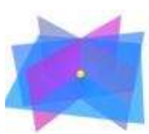
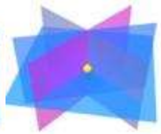
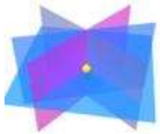
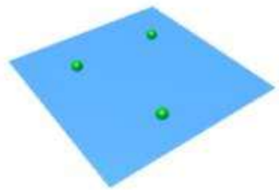
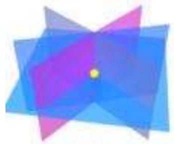
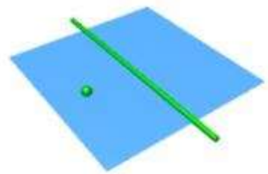
Продолжение таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
$(e_{3,1}^{1,0})^2 \cdot e_{3,0}^{1,0}$	– пересечение двух заданных прямых прямыми пространства		1+1+2=4	$e_{1,0}^{1,0}$	– прямая линия, пересекающая заданные прямые и проходящая через заданную точку	
	– прямая, проходящая через точку					
$(e_{3,1}^{1,0})^2 \cdot e_{2,1}^{1,0}$	– пересечение двух заданных прямых прямыми пространства		1+1+2=4	$e_{1,0}^{1,0}$	– линия пересечения двух плоскостей	
	– плоское поле прямых					
$e_{3,1}^{1,0} \cdot e_{2,0}^{1,0}$	– пересекающиеся прямые		1+3=4	$e_{1,0}^{1,0}$	– прямая, пересекающая заданную прямую и проходящая через заданную точку	
	– пучок прямых					

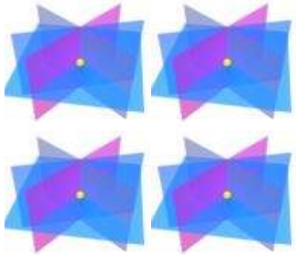
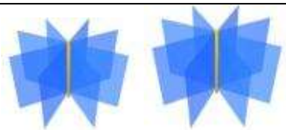
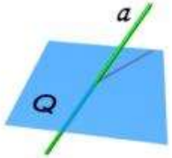
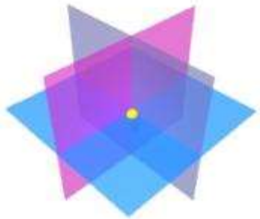
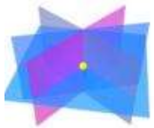
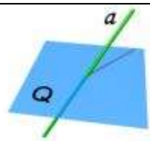
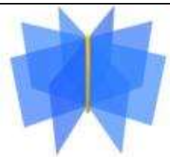
Продолжение таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
$(e_{3,0}^{1,0})^2$	– две связки прямых		2+2=4	$e_{1,0}^{1,0}$	– линия пересечения двух связок	
$(e_{2,1}^{1,0})^2$	– два плоских поля прямых		2+2=4	$e_{1,0}^{1,0}$	– линия пересечения двух плоскостей, заданных пересекающимися прямыми	
$e_{3,0}^{1,0} \cdot e_{2,1}^{1,0}$	– связка прямых		2+2=4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
	– плоское поле прямых					

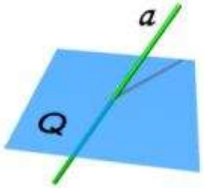
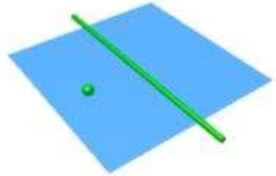
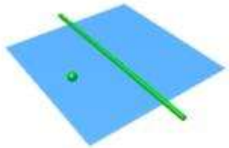
Продолжение таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
		Возможные условия для плоскости				
$(e_{3,2,0}^{2,1,0})^2$	– две связки плоскостей	 	1+1=2	$e_{3,1,0}^{2,1,0}$	– пучок плоскостей	
$(e_{3,2,0}^{2,1,0})^3$	– три связки плоскостей	  	1+1+1=3	$e_{2,1,0}^{2,1,0}$	– плоскость, проходящая через три точки	
$e_{3,2,0}^{2,1,0} \cdot e_{3,1,0}^{2,1,0}$	– связка плоскостей – пучок плоскостей	 	1+2=3	$e_{2,1,0}^{2,1,0}$	– плоскость, проходящая через точку и прямую	

Продолжение таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
$(e^{2,1,0}_{3,2,0})^4$	– четыре связки плоскостей		1+1+1+1= =4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
$(e^{2,1,0}_{3,1,0})^2$	– два пучка плоскостей		2+2=4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
$e^{2,1,0}_{3,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{3,2,0}$	– плоскость, пересекающая прямую		0+1=1	$e^{2,1,0}_{3,2,0}$	*Условия тождественны*	
	– связка плоскостей					
$e^{2,1,0}_{3,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{3,1,0}$	– плоскость, пересекающая прямую		0+2=2	$e^{2,1,0}_{3,1,0}$	*Условия тождественны*	
	– пучок плоскостей					

Окончание таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
$e^{2,1,0}_{3,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{2,1,0}$	– плоскость, пересекающая прямую		0+3=3	$e^{2,1,0}_{2,1,0}$	*Условия тождественны*	
	– плоскость, проходящая через точку и прямую					

Этап №5. Определение числа решений задачи или размерности и алгебраических характеристик искомого объекта

После анализа задач по результату редукции, выполненной в предыдущем пункте, определяется количество решений задачи или размерность искомых объектов, а также их алгебраических характеристик.

Этап №6. Конструирование графо-математических алгоритмов решения задачи и определение наиболее оптимального

Технологическая карта

Синтез геометрических задач

1. Определение размерности множества искомых объектов инцидентных трехмерному евклидову пространству. В данном случае в качестве искомых объектов могут выступать основные геометрические элементы: точки, прямые, плоскости, а также, и производные объекты, которые конструируются из основных (пучки, связки и т. д.).
2. Подбор позиционных, аффинных, метрических и других условий, которые предполагается включить в задачу.
3. Определение размерности подобранных условий и представление их символьном виде.
4. Составление задач по равенству размерности искомого множества с суммарной размерностью наложенных на него условий.
5. Проверка выбранных условий на критерий совместности.

Этап №1. Выбор искомых объектов составляемой задачи с определением их размерности

Таблица 6

Размерность линейных геометрических объектов, евклидова пространства E_3

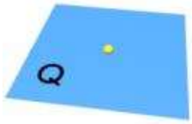
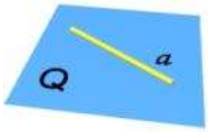
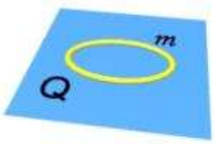
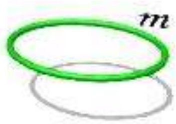
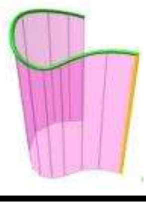
Элемент грассманова многообразия	Содержащее пространство					
	1-плоскость (прямая)		2-плоскость (обычная плоскость)		3-плоскость (пространство)	
	иллюстрация	D	иллюстрация	D	иллюстрация	D
Точка		1		2		3
Прямая	–	∅		2		4
Плоскость	–	∅	–	∅		3

Таблица 7

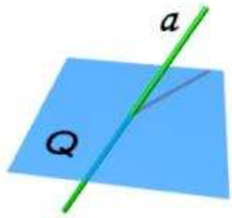
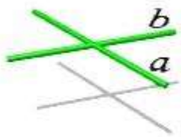
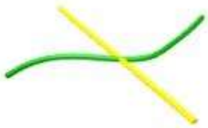
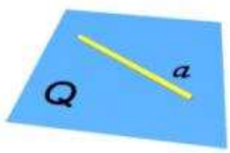
Размерность нелинейных геометрических объектов евклидова пространства E_3

Криволинейный объект	Содержащее пространство			
	2-плоскость (обычная плоскость)		3-плоскость (пространство)	
	иллюстрация	D	иллюстрация	D
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Коника		5		8
Квадрика	–	∅		9

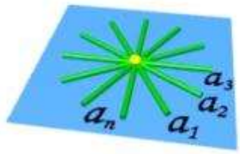
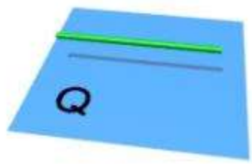
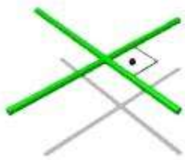
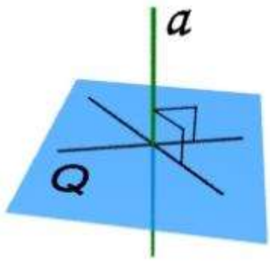
Этап №2. Подбор позиционных, аффинных, метрических и других условий, включаемых в задачу с представлением их в символьном виде и определением суммы их размерностей

Таблица 8

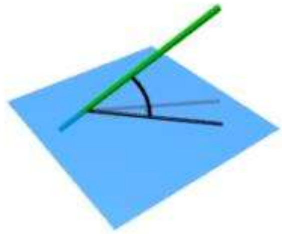
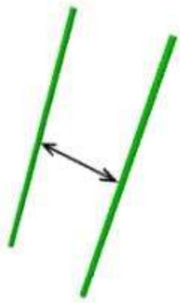
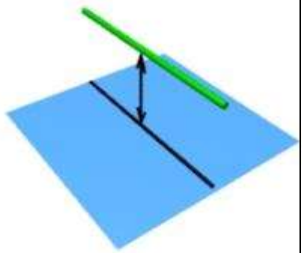
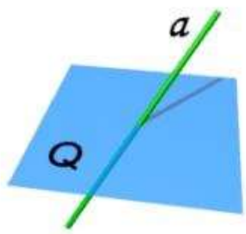
Геометрические условия отношений
между объектами трехмерного пространства

№	Формулировка	Условное обозначение	Символьное представление	Иллюстрация условия	Размерность условия
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		Условия для прямой линии			
		Инцидентность прямой			
1	Прямая пересекает плоскость	$a \cap Q$	$e^{1,0}_{3,2}$		0
2	Прямая пересекает прямую	$a \cap b$	$e^{1,0}_{3,1}$		1
3	Прямая пересекает кривую линию второго порядка	$a \cap m$	$2e^{1,0}_{3,1}$		1
4	Прямая проходит через точку	$a \ni A$	$e^{1,0}_{3,0}$		2
5	Прямая принадлежит плоскости	$a \in Q$	$e^{1,0}_{2,1}$		2

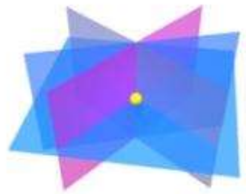
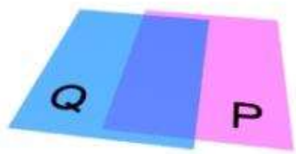
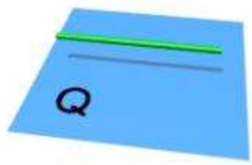
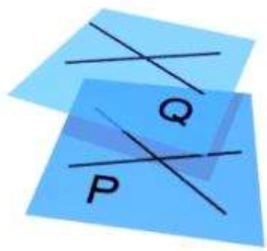
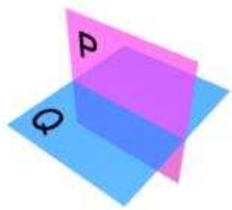
Продолжение таблицы 8

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
6	Прямая принадлежит пучку	$a \subset \alpha$, $a \ni A$, $A \in \alpha$	$e^{1,0}_{2,0}$		3
Параллельность прямой					
7	Прямая параллельна прямой	$a//b$	$\tilde{e}^{1,0}_{3,0}$		1
8	Прямая параллельна плоскости	$a//Q$	$\tilde{e}^{1,0}_{3,1}$		1
Перпендикулярность прямой					
9	Прямая перпендикулярна прямой	$a \perp b$	$\bar{e}^{1,0}_{3,1}$		1
10	Прямая перпендикулярна плоскости	$\mathrm{a} \perp \alpha$	$\bar{e}^{1,0}_{3,0}$		2
Дополнительные метрические условия для прямой					
11	Прямая наклонена к прямой под углом α	$a \wedge b$	$2e^{1,0}_{3,1}$		1

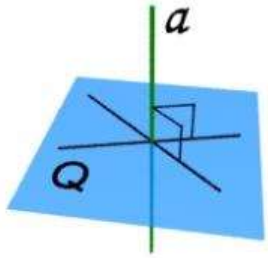
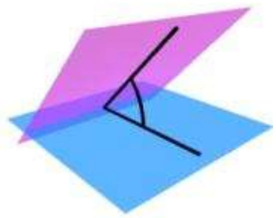
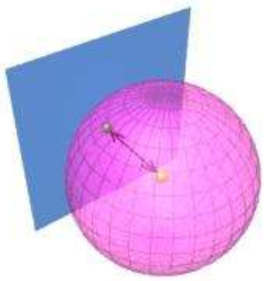
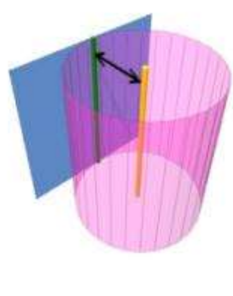
Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6
12	Прямая наклонена к плоскости под углом α	$a \wedge Q$	$2e^{1,0}_{3,1}$		1
13	Прямая отстоит от точки на расстоянии *l*	*s(1-0)=l*	$2e^{1,0}_{3,1}$		1
14	Прямая отстоит от прямой на расстоянии *l*	*s(1-1)=l*	$2e^{1,0}_{3,1}$		1
15	Прямая отстоит от плоскости на расстоянии *l*	*s(1-2)=l*	$2e^{1,0}_{2,1}$		2
Условия для плоскости					
Инцидентность плоскости					
16	Плоскость пересекает прямую	$Q \cap a$	$e^{2,1,0}_{3,2,1}$		0

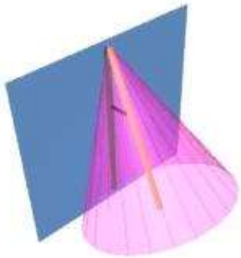
Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6
17	Плоскость проходит через точку пространства	$Q \ni A$	$e^{2,1,0}_{3,2,0}$		1
18	Плоскость проходит через прямую пространства	$Q \ni a$	$e^{2,1,0}_{3,1,0}$		2
19	Плоскость совпадает с заданной плоскостью	$Q \equiv P$	$e^{2,1,0}_{2,1,0}$		3
Параллельность плоскости					
20	Плоскость параллельна прямой	$Q//a$	$\tilde{e}^{2,1,0}_{3,2,0}$		1
21	Плоскость параллельна плоскости	$Q//P$	$\tilde{e}^{2,1,0}_{3,1,0}$		2
Перпендикулярность плоскости					
22	Плоскость перпендикулярна плоскости	$Q \perp P$	$\bar{e}^{2,1,0}_{3,2,0}$		1

Продолжение таблицы 8

1	2	3	4	5	6
23	Плоскость перпендикулярна прямой	$Q \perp a$	$\bar{e}^{2,1,0}_{3,1,0}$		2
Дополнительные метрические условия для плоскости					
24	Плоскость наклонена к прямой под углом α	$Q \wedge a$	$2e^{2,1,0}_{3,2,0}$		1
25	Плоскость наклонена к плоскости под углом α	$Q \wedge P$	$2e^{2,1,0}_{3,2,0}$		1
26	Плоскость отстоит от точки на расстоянии *l* или плоскость касается сферы	*s(2-0)=l*	$2e^{2,1,0}_{3,2,0}$		1
27	Плоскость отстоит от прямой на расстоянии *l* или плоскость касается цилиндрической поверхности	*s(2-1)=l*	$2e^{2,1,0}_{3,1,0}$		2

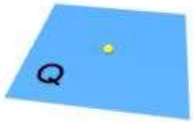
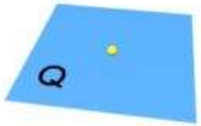
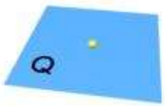
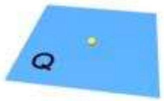
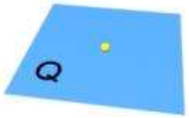
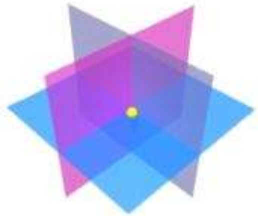
Окончание таблицы 8

1	2	3	4	5	6
28	Плоскость касается конической поверхности	$Q \wedge a$ $Q \ni A,$ $A \in a$	$2e^{2,1,0}_{3,1,0}$		2

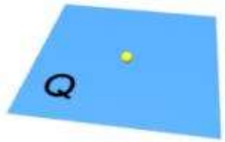
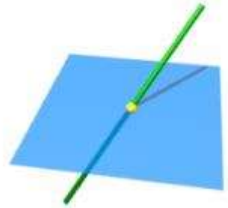
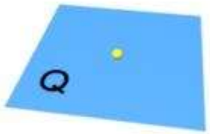
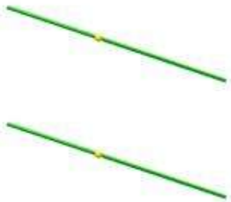
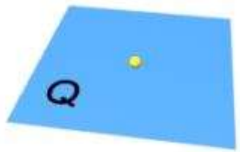
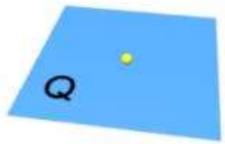
Этап №3. Проверка достаточного условия по критерию совместности выбираемых условий задачи

Таблица 9

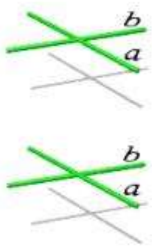
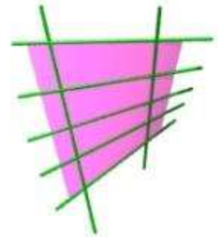
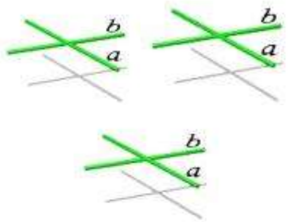
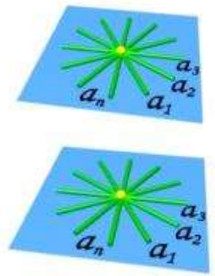
Размерности произведений условий и их редукция

Произведение условий	Условия	Иллюстрация условий	Размерность произведения	Редукция	Интерпретация условий	Иллюстрация интерпретации
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Возможные условия для точки						
$e_2^0 \cdot e_2^0 = (e_2^0)^2$	– точка плоскости		1+1=2	e_1^0	– точка на линии пересечения заданных плоскостей	
	– точка плоскости					
$(e_2^0)^3$	– точка в трех различных плоскостях	  	1+1+1=3	e_0^0	– точка, например, начало координат для трех плоскостей проекций	

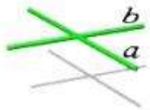
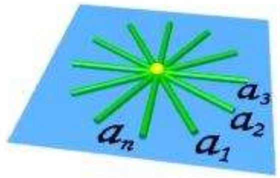
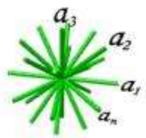
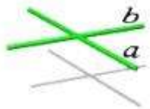
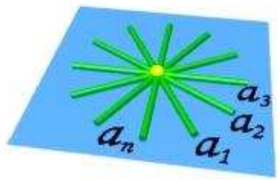
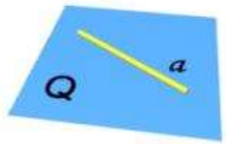
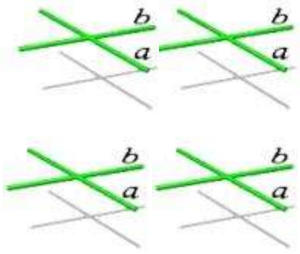
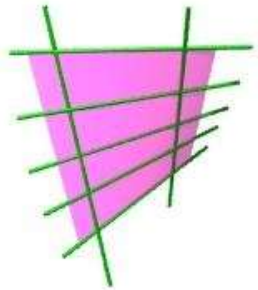
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_2^0 \cdot e_1^0$</td><td>– точка плоскости</td><td></td><td rowspan="2">1+2=3</td><td rowspan="2">e_0^0</td><td rowspan="2">– точка пересечения прямой и плоскости</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– точка прямой</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_2^0 \cdot e_0^0$</td><td>– точка плоскости</td><td></td><td rowspan="2">1+3=4</td><td rowspan="2">$\varnothing$</td><td colspan="2" rowspan="2">Условия несовместны</td></tr>
<tr><td>– совпадение точки с точкой</td><td></td></tr>
<tr><td>$(e_1^0)^2$</td><td>– точка на двух прямых, не лежащих в одной плоскости</td><td></td><td>2+2=4</td><td>$\varnothing$</td><td colspan="2">Условия несовместны</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_3^0 \cdot e_2^0$</td><td>– точка пространства</td><td></td><td rowspan="2">0+1=1</td><td rowspan="2">e_2^0</td><td rowspan="2">Условия тождественны</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– точка плоскости</td><td></td></tr>
</table>

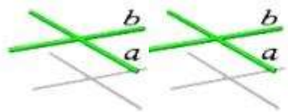
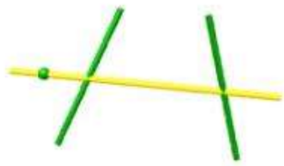
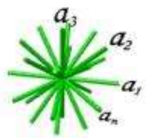
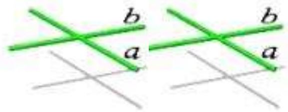
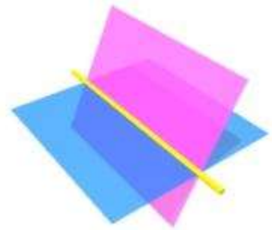
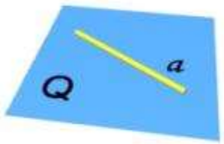
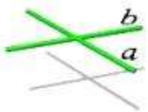
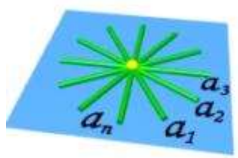
Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7
$e_3^0 \cdot e_1^0$	– точка пространства		0+2=2	e_1^0	*Условия тождественны*	
	– точка прямой					
$e_3^0 \cdot e_0^0$	– точка пространства		0+3=3	e_0^0	*Условия тождественны*	
	– совпадение точки с точкой					
Возможные условия для прямой						
$(e_{3,1}^{1,0})^2$	– прямая, пересекающая две заданные прямые		1+1=2	$e_{3,0}^{1,0} + e_{2,1}^{1,0}$	– связка прямых и плоское поле прямых	
$(e_{3,1}^{1,0})^3$	– прямая, пересекающая три заданные прямые		1+1+1=3	$2 \cdot e_{2,0}^{1,0}{}^{*}$	– два пучка прямых	

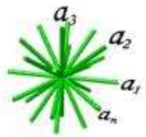
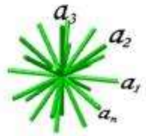
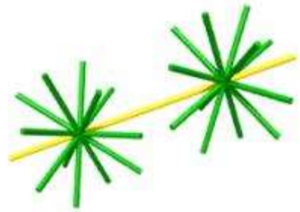
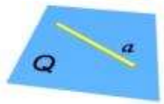
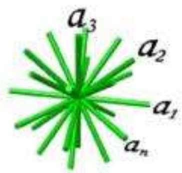
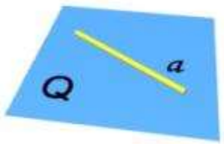
Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7
$e_{3,1}^{1,0} \cdot e_{3,0}^{1,0}$	– пересекающиеся прямые		1+2=3	$e_{2,0}^{1,0}$	– пучок прямых	
	– прямая, проходящая через точку					
$e_{3,1}^{1,0} \cdot e_{2,1}^{1,0}$	– пересекающиеся прямые		1+2=3	$e_{2,0}^{1,0}$	– пучок прямых	
	– плоское поле прямых					
$(e_{3,1}^{1,0})^4$	– пересечение четырех заданных прямых прямыми пространства		1+1+1+1= =4	$2 \cdot e_{1,0}^{1,0}$**	– две прямые линии, пересекающие заданные прямые	

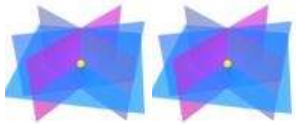
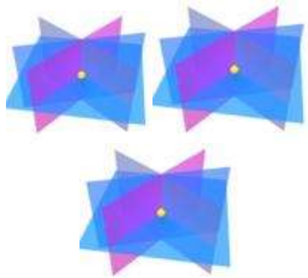
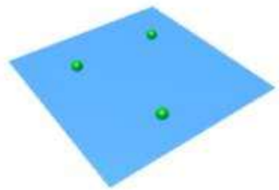
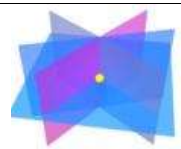
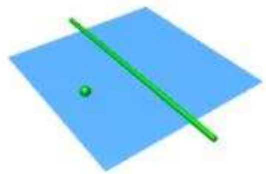
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$(e_{3,1}^{1,0})^2 \cdot e_{3,0}^{1,0}$</td><td>– пересечение двух заданных прямых прямыми пространства</td><td></td><td rowspan="2">1+1+2=4</td><td rowspan="2">$e_{1,0}^{1,0}$</td><td rowspan="2">– прямая линия, пересекающая заданные прямые и проходящая через заданную точку</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– прямая, проходящая через точку</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(e_{3,1}^{1,0})^2 \cdot e_{2,1}^{1,0}$</td><td>– пересечение двух заданных прямых прямыми пространства</td><td></td><td rowspan="2">1+1+2=4</td><td rowspan="2">$e_{1,0}^{1,0}$</td><td rowspan="2">– линия пересечения двух плоскостей</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– плоское поле прямых</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_{3,1}^{1,0} \cdot e_{2,0}^{1,0}$</td><td>– пересекающиеся прямые</td><td></td><td rowspan="2">1+3=4</td><td rowspan="2">$e_{1,0}^{1,0}$</td><td rowspan="2">– прямая, пересекающая заданную прямую и проходящая через заданную точку</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– пучок прямых</td><td></td></tr>
</table>

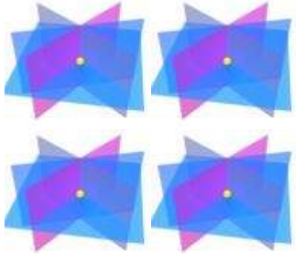
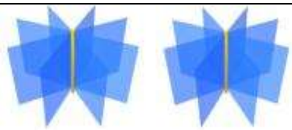
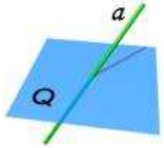
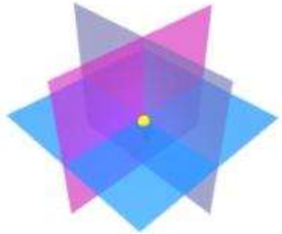
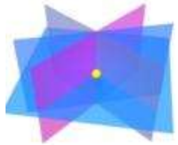
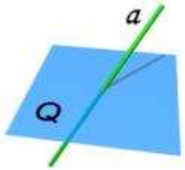
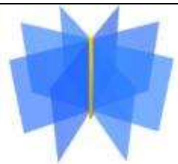
Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7
$(e^{1,0}_{3,0})^2$	– две связки прямых	 	2+2=4	$e^{1,0}_{1,0}$	– линия пересечения двух связок	
$(e^{1,0}_{2,1})^2$	– два плоских поля прямых	 	2+2=4	$e^{1,0}_{1,0}$	– линия пересечения двух плоскостей, заданных пересекающимися прямыми	
$e^{1,0}_{3,0} \cdot e^{1,0}_{2,1}$	– связка прямых		2+2=4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
	– плоское поле прямых					

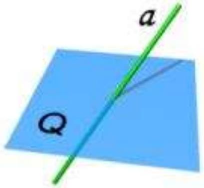
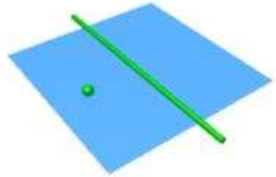
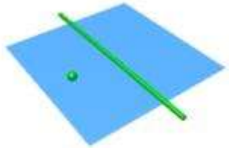
Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th></th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th></tr>
<tr><td colspan="7">***Возможные условия для плоскости***</td></tr>
<tr><td>$(e_{3,2,0}^{2,1,0})^2$</td><td>– две связки плоскостей</td><td></td><td>1+1=2</td><td>$e_{3,1,0}^{2,1,0}$</td><td>– пучок плоскостей</td><td></td></tr>
<tr><td>$(e_{3,2,0}^{2,1,0})^3$</td><td>– три связки плоскостей</td><td></td><td>1+1+1=3</td><td>$e_{2,1,0}^{2,1,0}$</td><td>– плоскость, проходящая через три точки</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$e_{3,2,0}^{2,1,0} \cdot e_{3,1,0}^{2,1,0}$</td><td>– связка плоскостей</td><td></td><td rowspan="2">1+2=3</td><td rowspan="2">$e_{2,1,0}^{2,1,0}$</td><td rowspan="2">– плоскость, проходящая через точку и прямую</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>– пучок плоскостей</td><td></td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7
$(e^{2,1,0}_{3,2,0})^4$	– четыре связки плоскостей		1+1+1+1= =4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
$(e^{2,1,0}_{3,1,0})^2$	– два пучка плоскостей		2+2=4	$\varnothing$	*Условия несовместны*	
$e^{2,1,0}_{3,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{3,2,0}$	– плоскость, пересекающая прямую		0+1=1	$e^{2,1,0}_{3,2,0}$	*Условия тождественны*	
	– связка плоскостей					
$e^{2,1,0}_{3,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{3,1,0}$	– плоскость, пересекающая прямую		0+2=2	$e^{2,1,0}_{3,1,0}$	*Условия тождественны*	
	– пучок плоскостей					

Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7
$e^{2,1,0}_{3,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{2,1,0}$	– плоскость, пересекающая прямую		0+3=3	$e^{2,1,0}_{2,1,0}$	*Условия тождественны*	
	– плоскость, проходящая через точку и прямую					

Этап №4. Составление задачи, удовлетворяющей необходимому условию равенства размерностей искомого множества с суммарной размерностью наложенных на него совместных условий.

На данном этапе следует записать условие задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Анкета

____

Ваше образование, специальность, год окончания втуза

____

Сфера Вашей профессиональной деятельности

Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы одним из вариантов: да, нет, не знаю

1. Знаете ли Вы о современных 3D-возможностях систем автоматизированного проектирования?
2. Владеете ли Вы хотя бы одной из современных САПР?
3. Используете ли Вы в своей работе САПР?
4. Выполняете ли Вы чертежи в ручную хотя бы иногда?
5. Используете ли Вы в своей работе чертежи (обычные или электронные)?
6. Вы можете в своей работе обойтись без чертежей?
7. Пользуетесь ли Вы в своей работе положениями, изученными в начертательной геометрии?
8. Помните ли Вы, что такое комплексный чертеж?
9. Применяете ли Вы в своей работе способы преобразования комплексного чертежа?
10. Важно ли для инженера иметь развитое пространственное мышление?
11. Благодаря 3D-возможностям систем автоматизированного проектирования инженеру совсем не обязательно обладать пространственным мышлением?
12. Следует ли оставить начертательную геометрию в учебных планах втузов?
13. Дисциплина «Начертательная геометрия» должна измениться в связи с появившимися 3D-возможностями компьютерной графики?
14. Благодаря компьютерным 3D-возможностям начертательная геометрия неактуальна? Она должна исчезнуть из учебных планов втузов?
15. Пространственное мышление является двигателем изобретательской способности?
16. Согласны ли Вы с утверждением: Инженеру совсем необязательно представлять свое изобретение в голове, так как существуют САПР с возможностями 3D-моделирования.
17. Несмотря на компьютерные 3D-возможности для современного инженера важны пространственное мышление и изобретательская способность?

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Контрольная работа по инженерной геометрии
(до эксперимента)

1. Анализ геометрических условий задач

Задача 1. Даны плоскость $Q(a \cap b)$ и точки A и B, ей не принадлежащие. В плоскости Q построить точки, удаленные от точки A на расстоянии R_1, и от точки B на расстоянии R_2.

Задача 2. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Провести прямые, пересекающие AB, параллельные CD и отстоящие от CD на заданное расстояние d.

2. Синтез условий задач

Задача 3. Составить 5 корректных задач с совместными условиями, в которых требуется найти множество прямых евклидова пространства, используя геометрические условия из следующего списка:

1) Прямая проходит через точку
2) Прямая пересекает прямую
3) Прямая параллельна прямой
4) Прямая перпендикулярна прямой
5) Прямая наклонена к прямой под углом α
6) Прямая отстоит от прямой на расстоянии l
7) Прямая пересекает плоскость
8) Прямая принадлежит плоскости
9) Прямая параллельна плоскости
10) Прямая перпендикулярна плоскости
11) Прямая наклонена к плоскости под углом α
12) Прямая отстоит от плоскости на расстоянии l

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Контрольная работа по инженерной геометрии (после эксперимента)

1. Анализ геометрических условий задач

Задача 1. Даны плоскость $Q(\Delta ABC)$ общего положения и точка S вне ее. Через точку S провести прямые, наклоненные к горизонтальной плоскости проекций под углом $60°$ и параллельные заданной плоскости Q.

Задача 2. Даны прямая AB и фронтальная проекция прямой CD. Построить горизонтальную проекцию прямой CD, если расстояние между AB и CD равно d.

2. Синтез условий задач

Задача 3. Составить 5 корректных задач с совместными условиями, в которых требуется найти множество плоскостей евклидова пространства, используя геометрические условия из следующего списка:

1) Плоскость проходит через точку
2) Плоскость отстоит от точки
3) Плоскость проходит через прямую
4) Плоскость пересекает прямую
5) Плоскость параллельна прямой
6) Плоскость перпендикулярна прямой
7) Плоскость наклонена к прямой под углом α
8) Плоскость отстоит от прямой на расстоянии l
9) Плоскость пересекает плоскость
10) Плоскость параллельна плоскости
11) Плоскость перпендикулярна плоскости
12) Плоскость наклонена к плоскости под углом α
13) Плоскость отстоит от плоскости на расстоянии l

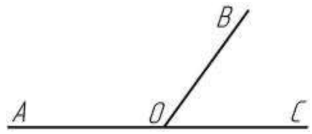
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Задания входного контроля при проверке исходного уровня сформированности исследовательских компетенций студентов (до эксперимента)

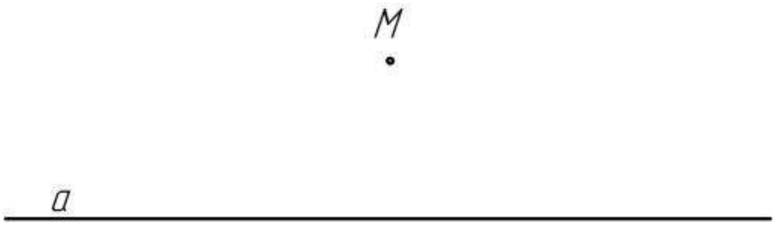
1 вариант

Задача 1. Начертите острый угол. Постройте для него смежный угол.

Напоминание: Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжение одна другой, называются смежными (см. рисунок).



Задача 2. Дана прямая *a* и точка *M*, не лежащая на прямой *a*. Постройте прямую *m*, проходящую через точку *M* и наклоненную к прямой *a* под углом 45°.



Задача 3. Составьте 3 задачи с корректными и совместными условиями, в которых требуется построить прямую, используя геометрические условия из следующего списка:

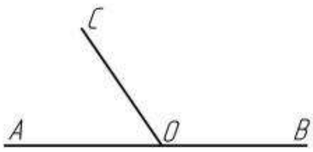
1) Прямая проходит через точку
2) Прямая пересекает прямую
3) Прямая параллельна прямой
4) Прямая перпендикулярна прямой
5) Прямая наклонена к прямой под данным углом
6) Прямая проходит через центр окружности
7) Прямая касается окружности

Условия могут в задаче повторяться, например, «…прямая проходит через две точки..», «…прямая пересекает две прямые…» и т. д.

2 вариант

Задача 1. Начертите тупой угол. Постройте для него смежный угол.

Напоминание: Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжение одна другой, называются смежными (см. рисунок).



Задача 2. Дана прямая a и точка M, принадлежащая прямой a. Постройте прямую m, проходящую через точку M и наклоненную к прямой a под углом 45°.

Задача 3. Составьте 3 задачи с корректными и совместными условиями, в которых требуется построить прямую, используя геометрические условия из следующего списка:

1) Прямая проходит через точку
2) Прямая пересекает прямую
3) Прямая параллельна прямой
4) Прямая перпендикулярна прямой
5) Прямая наклонена к прямой под данным углом
6) Прямая проходит через центр окружности
7) Прямая касается окружности

Условия могут в задаче повторяться, например, «…прямая проходит через две точки..», «…прямая пересекает две прямые…» и т. д.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

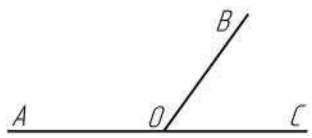
Образец решения заданий входного контроля при проверке уровня сформированности исследовательских компетенций студентов (до эксперимента)

1 вариант

Задача 1.

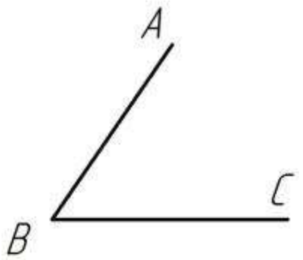
Начертите острый угол. Постройте для него смежный угол.

Напоминание: Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжение одна другой, называются смежными.



Решение:

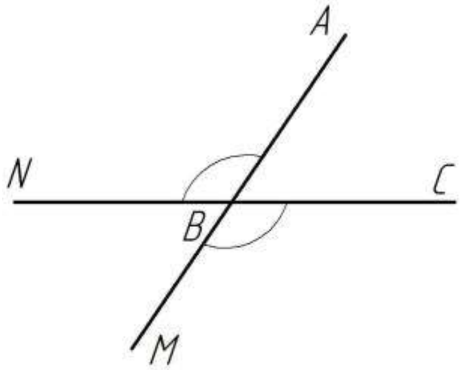
<u>*Анализ*</u>: 1) Угол называется острым, если он меньше 90°:



2) Смежными называются углы, если они имеют одну общую сторону, а вторые стороны являются продолжениями одна другой, то есть являются дополнительными полупрямыми.

<u>*Исследование*</u>: В связи с тем, что в условии задачи не оговорена общая сторона смежных углов, то построенный $\angle ABC$ имеет два смежных угла: $\angle ABN$ и $\angle CBM$, то есть задача имеет два возможных ответа.

<u>*Построение*</u>:

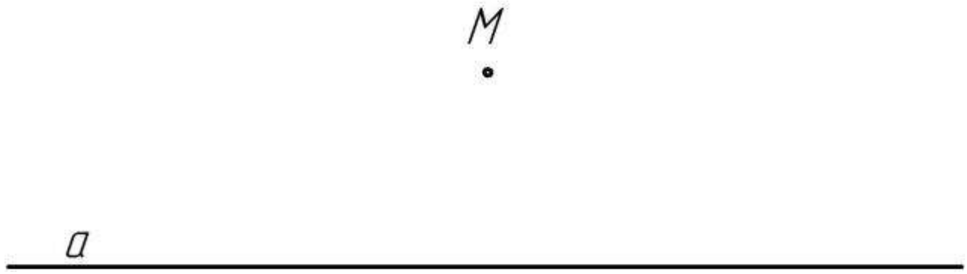


<u>*Доказательство*</u>: 1) Построенный угол $\angle ABC$ является острым, так как он меньше 90°;

2) Построенные углы $\angle ABN$ и $\angle CBM$ являются смежными углами для $\angle ABC$, так как у них одна сторона общая, а вторые стороны является продолжением друг друга.

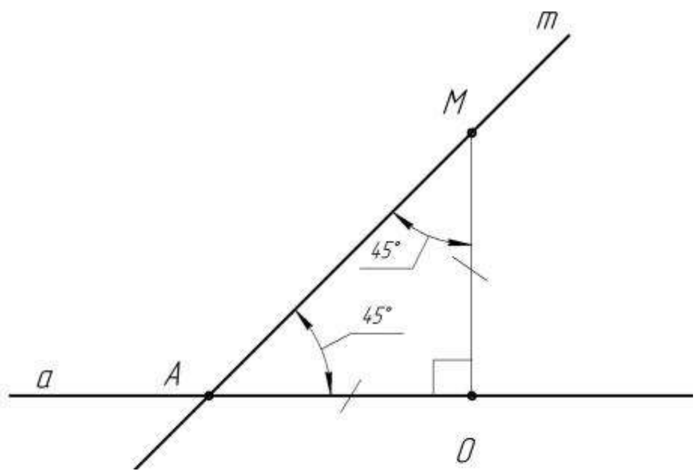
Задача 2.

Дана прямая a и точка M, не лежащая на прямой a. Постройте прямую m, проходящую через точку M и наклоненную к прямой a под углом 45°.



Решение:

<u>*Анализ*</u>: 1) Допустим прямая m построена и она пересекает прямую a в точке A. Это сделать возможно, так как через точку можно провести множество прямых линий из которого обязательно найдется хотя бы



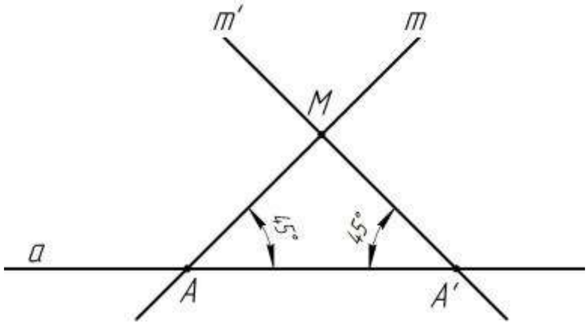
одна прямая пересекающая заданную прямую *a* под углом 45°.

2) Если из точки *M* опустить перпендикуляр к прямой *a*, то мы получим прямоугольный треугольник Δ*MOA*. Построенный Δ*MOA* будет еще и равнобедренным, т.к. по условию задачи ∠*MAO*=45°, а, сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то ∠*AMO*=45°.

3) В равнобедренном треугольнике стороны, лежащие против равных углов равные, следовательно, расстояние от точки *M* до прямой *a* (длина, проведенного из точки *M* к прямой *a* перпендикуляра) будет равна расстоянию от основания перпендикуляра – точки *O*, до точки *A* – точки пересечения прямой *a* с прямой *m*, которую и требуется построить.

<u>*Исследование*</u>: Задача всегда имеет решение, так как через точку можно провести множество прямых линий, из которого обязательно найдется хотя бы одна прямая пересекающая прямую *a* под углом 45°.

При этом возможных ответов – два, так как из точки *M* под заданным углом к прямой *a* можно построить две прямые – с наклоном влево и с наклоном вправо.

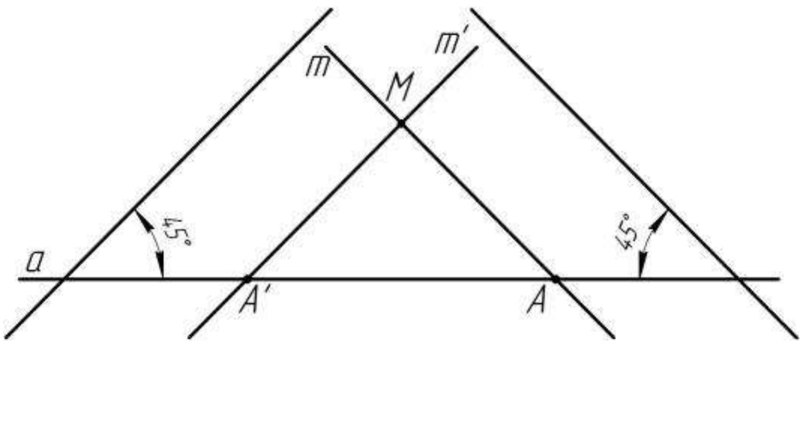


<u>*Построение*</u>:

Первый способ

1) С помощью транспортира или чертежного угольника с углом 45° отложить угол 45° к прямой *a*;

2) Параллельным переносом перенести эту прямую так, чтобы она прошла через заданную точку *M*.



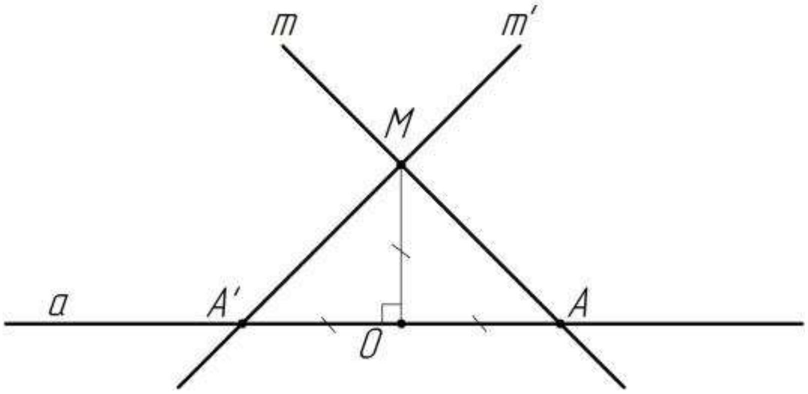
Второй способ

1) Из точки M опустить перпендикуляр на прямую a;

2) С помощью циркуля или линейки с делениями измерить расстояние от точки M до основания перпендикуляра – точки O;

3) С помощью циркуля или линейки с делениями построить точку A; для этого от точки O вдоль прямой a отложить замеренное расстояние;

4) Через заданную точку M и построенную точку A провести искомую прямую m.



Третий способ

1) Из точки M провести окружность радиусом больше, чем расстояние от точки M до заданной прямой a;

2) Отметить точки E и F – точки пересечения построенной окружности с прямой a;

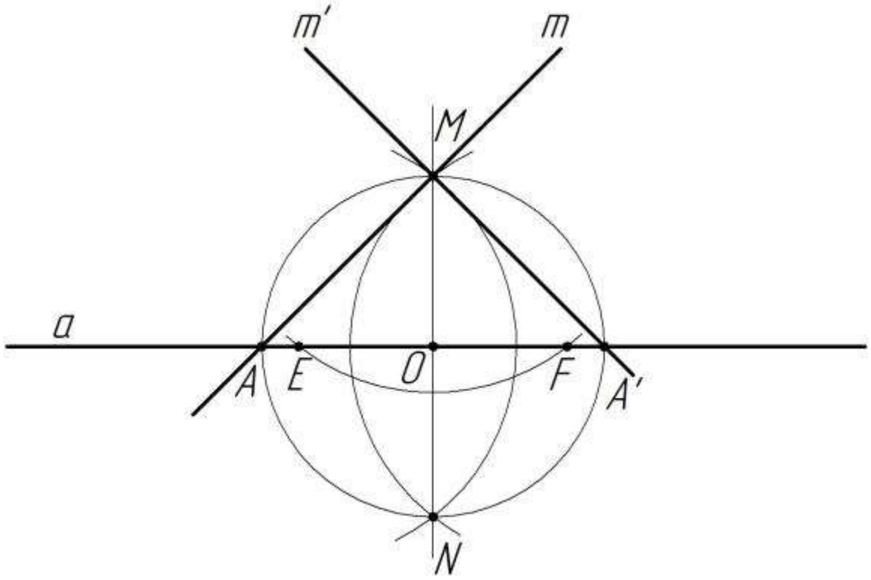
3) С помощью циркуля построить серединный перпендикуляр MN отрезка EF (серединный перпендикуляр пройдет через точку M);

4) Отметить точку O – точку пересечения серединного перпендикуляра с заданной прямой a;

5) Измерить длину серединного перпендикуляра от точки M до точки O;

6) С помощью циркуля построить точку A; для этого от точки O вдоль прямой a отложить замеренное расстояние;

7) Через заданную точку M и построенную точку A провести искомую прямую m.



<u>*Доказательство*</u>: Построенная прямая является искомой, так как:

1) она проходит через заданную точку *M*;
2) угол ее наклона к прямой *a* ($\angle MAO$ или $\angle MA'O'$) равен 45°:

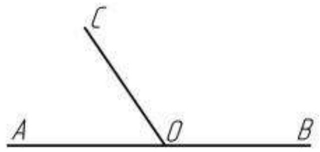
Рассмотрим треугольник ΔAOM. Это прямоугольный (*MO* – перпендикуляр к прямой *a*) и равнобедренный (*MO=OA*) треугольник. Следовательно, его острые углы равны 45°, так как они равны между собой, как углы при основании равнобедренного треугольника, а сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2 вариант

Задача 1.

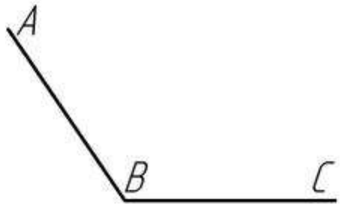
Начертите тупой угол. Постройте для него смежный угол.

Напоминание: Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжение одна другой, называются смежными.



Решение:

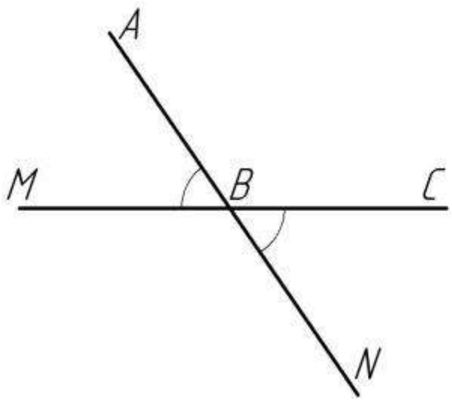
<u>*Анализ*</u>: 1) Угол называется тупым, если он больше 90°, но меньше 180°



2) Смежными называются углы, если они имеют одну общую сторону, а вторые стороны являются продолжениями одна другой, то есть являются дополнительными полупрямыми.

<u>*Исследование*</u>: В связи с тем, что в условии задачи не оговорена общая сторона смежных углов, то построенный $\angle ABC$ имеет два смежных угла: $\angle ABM$ и $\angle CBN$, то есть задача имеет два возможных ответа.

<u>*Построение*</u>:



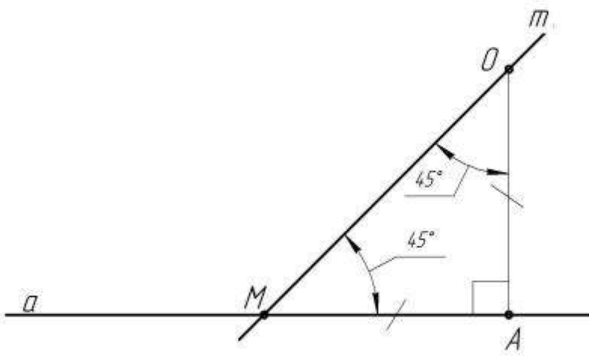
<u>*Доказательство*</u>: 1) Построенный угол $\angle ABC$ является тупым, так как он больше 90°, но меньше 180°;

2) Построенные углы $\angle ABM$ и $\angle CBN$ являются смежными углами для $\angle ABC$, так как у них одна сторона общая, а вторые стороны является продолжением друг друга.

Задача 2.

Дана прямая *a* и точка *M*, принадлежащая прямой *a*. Постройте прямую *m*, проходящую через точку *M* и наклоненную к прямой *a* под углом 45°.

Решение:



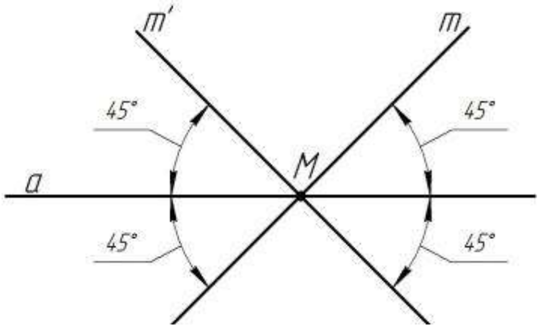
<u>*Анализ*</u>: 1) Допустим прямая *m* построена и она пересекает прямую *a* в точке *A*. Это сделать возможно, так как через точку можно провести множество прямых линий из которого обязательно найдется хотя бы одна прямая пересекающая заданную прямую *a* под углом 45°.

2) Если из точки *M* вдоль прямой *a* отложить некоторое расстояние (отрезок *MA*), а затем из точки *A* построить перпендикуляр к прямой *a* и отложить на нем отрезок *AO*, равный отрезку *MA*, то мы получим равнобедренный прямоугольный треугольник ΔMAO.

3) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а так как сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle AMO$=45° – требуемый угол наклона искомой прямой к заданной прямой *a*.

<u>*Исследование*</u>: Задача всегда имеет решение, так как через точку можно провести множество прямых линий, из которого обязательно найдется хотя бы одна прямая пересекающая прямую *a* под углом 45°.

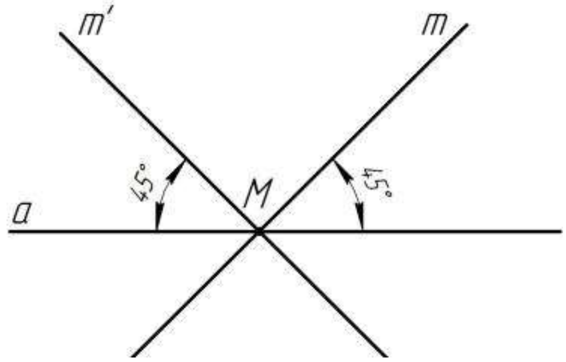
При этом возможных ответов – два, так как из точки M под заданным углом к прямой a можно построить две прямые – с наклоном влево и вправо.



<u>*Построение*</u>:

Первый способ

С помощью транспортира или чертежного угольника с углом 45° отложить из точки M прямую m под углом 45° к прямой a.



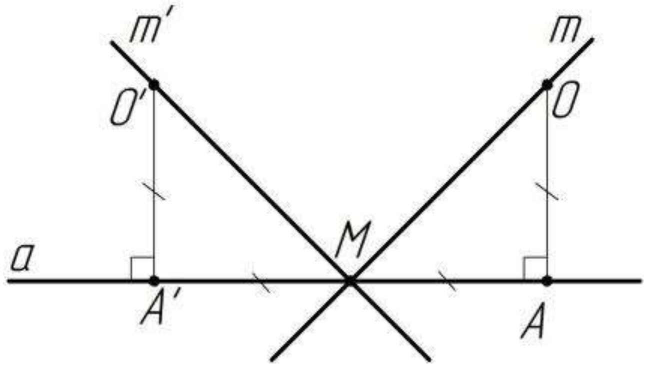
Второй способ

1) С помощью циркуля или линейки с делениями от точки M вдоль прямой a отложить некоторое расстояние MA;

2) Из точки A построить перпендикуляр к прямой a;

3) С помощью циркуля или линейки с делениями построить точку O; для этого от точки A вдоль перпендикуляра отложить расстояние, равное длине отрезка MA;

4) Через заданную точку M и построенную точку O провести искомую прямую m.



Третий способ

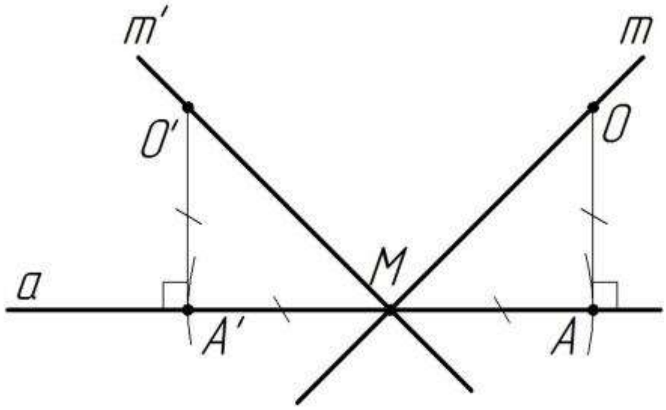
1) Из точки M провести окружность некоторого радиуса MA;

2) Отметить точку A – точку пересечения построенной окружности с прямой a;

3) С помощью чертежного угольника из точки A построить перпендикуляр к прямой a;

4) От точки A на построенном перпендикуляре отметить точку O, так чтобы $AO = MA$;

7) Через заданную точку M и построенную точку O провести искомую прямую m.



Доказательство: Построенная прямая является искомой, так как:

1) она проходит через заданную точку M;
2) угол ее наклона к прямой a ($\angle OMA$ или $\angle O'MA'$) равен 45°:

Рассмотрим треугольник ΔOMA. Это прямоугольный (OA – перпендикуляр к прямой a) и равнобедренный ($MA=AO$) треугольник. Следовательно, его острые углы равны 45°, так как они равны между собой, как углы при основании равнобедренного треугольника, а сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

1 и 2 вариант

Задача 3.

Составьте 3 задачи с корректными и совместными условиями, в которых требуется построить прямую, используя геометрические условия из следующего списка:

1) Прямая проходит через точку
2) Прямая пересекает прямую
3) Прямая параллельна прямой
4) Прямая перпендикулярна прямой
5) Прямая наклонена к прямой под данным углом
6) Прямая проходит через центр окружности
7) Прямая касается окружности

Условия могут в задаче повторяться, например, «…прямая проходит через две точки..», «…прямая пересекает две прямые…» и т. д.

Решение:

Задача №1. Простройте прямую, проходящую через две заданные точки.

Исследование на корректность и совместность условий: Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну (Аксиома).

Задача №2. Простройте прямую, проходящую через заданную точку, параллельно заданной прямой. При этом заданная точка не лежит на заданной прямой.

Исследование на корректность и совместность условий: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (Аксиома параллельных прямых).

Задача №3. Простройте прямую, проходящую через заданную точку, параллельную одной из двух заданных пересекающихся прямых и пересекающую другую из этих прямых.

Исследование на корректность и совместность условий: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Вторую заданную прямую построенная прямая будет пересекать, так как эта вторая заданная прямая не параллельна первой заданной прямой (по условию они заданы пересекающимися), а, следовательно, и не параллельна искомой прямой, т. е. они будут пересекаться.

Задача №4. Простройте прямую, проходящую через центр окружности и перпендикулярную заданной прямой.

Исследование на корректность и совместность условий: Из точки (центр окружности), не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Задача №5. Простройте прямую, наклоненную к двум пересекающимся прямым под равными углами.

Исследование на корректность и совместность условий: Линия разделяющая угол на два равных угла является лучом, исходящим из вершины этого угла, который называется биссектрисой. Две пересекающиеся прямые составляют 4 угла, поэтому ответом будут 4 луча, исходящие из точки пересечения заданных прямых, которые будут друг друга дополнять до прямой и ответом будут две прямые линии.

Задача №6. Простройте прямую, проходящую через заданную точку и касающуюся заданной окружности.

Исследование на корректность и совместность условий: Искомая прямая линия по условию задачи должна быть касательной к заданной окружности, т. е. иметь с окружностью одну общую точку. Через любые две точки – заданная точка и точка касания – можно провести прямую, и притом только одну. Однако таких касательных прямых для каждой окружности может быть две.

Задача №7. Простройте прямую, параллельную заданной прямой и касающуюся заданной окружности.

Исследование на корректность и совместность условий: Искомая прямая линия по условию задачи должна быть касательной к заданной окружности, т. е. иметь с окружностью одну общую точку. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Однако таких касательных прямых для каждой окружности может быть две.

Задача №8. Простройте прямую, касающуюся одновременно двух заданных окружностей.

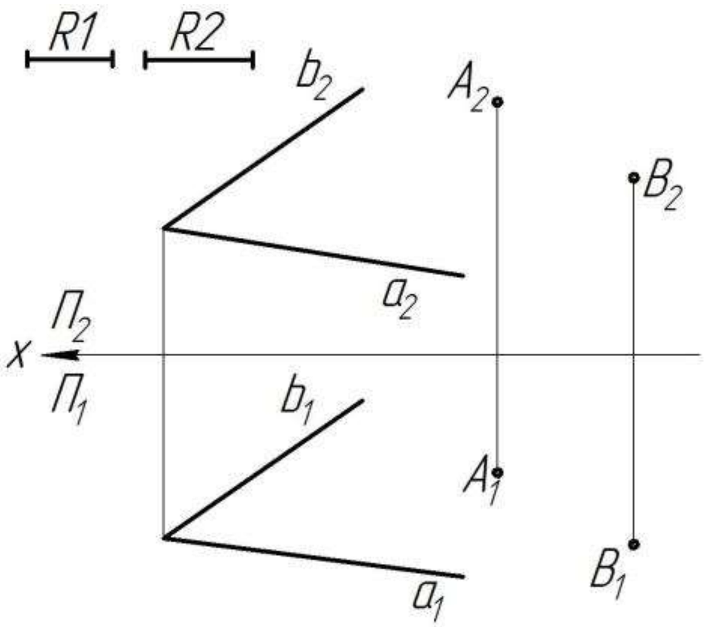
Исследование на корректность и совместность условий: Искомая прямая линия по условию задачи должна быть касательной к каждой из двух заданных окружностей, т. е. иметь с каждой окружностью одну общую точку. Через любые две точки – точки касания с заданными окружностями – можно провести прямую, и притом только одну. Однако таких касательных прямых для двух окружностей может быть две.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

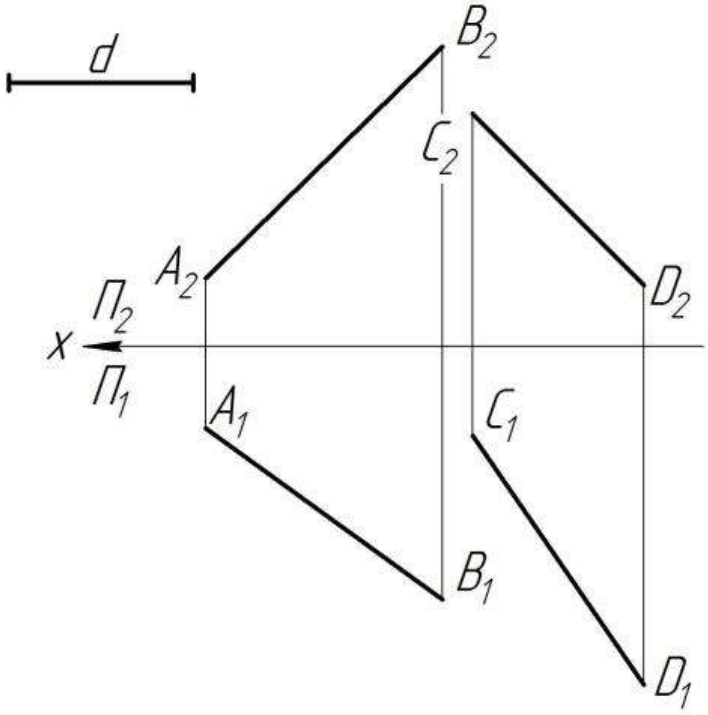
Задания итогового контроля при проверке приобретенного уровня сформированности исследовательской компетенции будущих инженеров (после эксперимента)

1 вариант

Задача 1. Даны плоскость $Q(a \cap b)$ и точки A и B, ей не принадлежащие. В плоскости Q построить точки, удаленные от точки A на расстоянии R_1, и от точки B на расстоянии R_2.



Задача 2. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Провести прямые, пересекающие AB, параллельные CD и отстоящие от CD на заданное расстояние d.



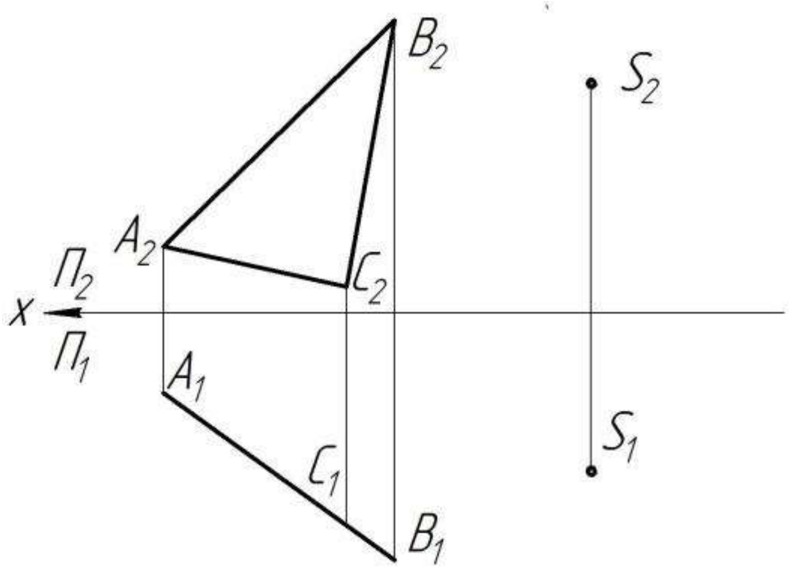
Задача 3. Составить 5 корректных задач с совместными условиями, в которых требуется найти множество прямых евклидова пространства, используя геометрические условия из следующего списка:

1) Прямая проходит через точку
2) Прямая пересекает прямую
3) Прямая параллельна прямой
4) Прямая перпендикулярна прямой
5) Прямая наклонена к прямой под данным углом
6) Прямая отстоит от прямой на данном расстоянии
7) Прямая пересекает плоскость
8) Прямая принадлежит плоскости
9) Прямая параллельна плоскости
10) Прямая перпендикулярна плоскости
11) Прямая наклонена к плоскости под данным углом
12) Прямая отстоит от плоскости на данном расстоянии

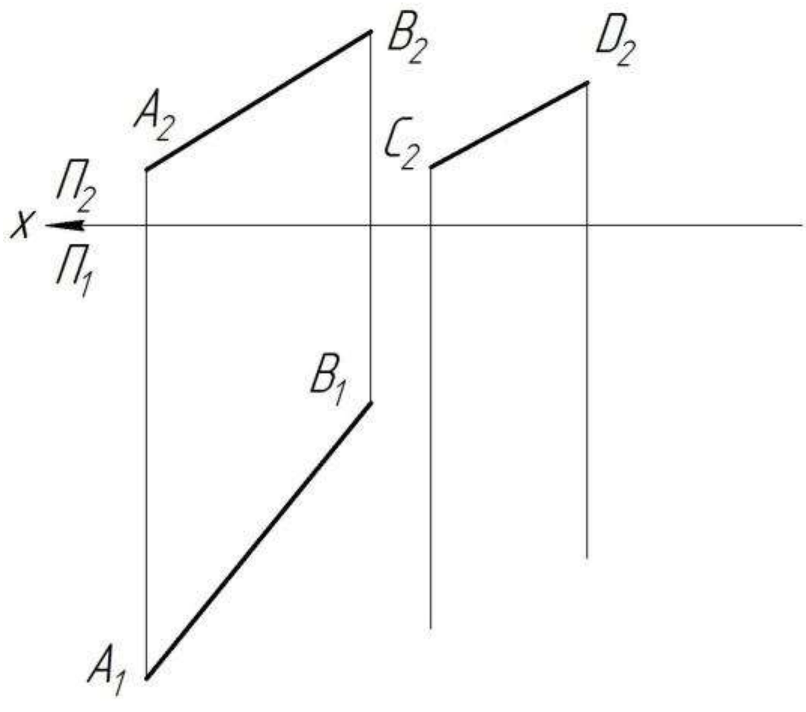
Условия могут в задаче повторяться, например, «…прямая проходит через две точки..», «…прямая пересекает две прямые…» и т. д.

2 вариант

Задача 1. Даны плоскость $\{\Delta ABC\}$ общего положения и точка S вне ее. Через точку S провести прямые, наклоненные к горизонтальной плоскости проекций под углом $60°$ и параллельные заданной плоскости $\{\Delta ABC\}$.



Задача 2. Даны прямая AB и фронтальная проекция прямой CD. Построить горизонтальную проекцию прямой CD, если расстояние между AB и CD равно d.



Задача 3. Составить 5 корректных задач с совместными условиями, в которых требуется найти множество плоскостей евклидова пространства, используя геометрические условия из следующего списка:

13) Плоскость проходит через точку
14) Плоскость отстоит от точки
15) Плоскость проходит через прямую
16) Плоскость пересекает прямую
17) Плоскость параллельна прямой
18) Плоскость перпендикулярна прямой
19) Плоскость наклонена к прямой под данным углом
20) Плоскость отстоит от прямой на данном расстоянии
21) Плоскость пересекает плоскость
22) Плоскость параллельна плоскости
23) Плоскость перпендикулярна плоскости
24) Плоскость наклонена к плоскости под данным углом
25) Плоскость отстоит от плоскости на данном расстоянии

Условия могут в задаче повторяться, например, «…прямая проходит через две точки..», «…прямая пересекает две прямые…» и т. д.

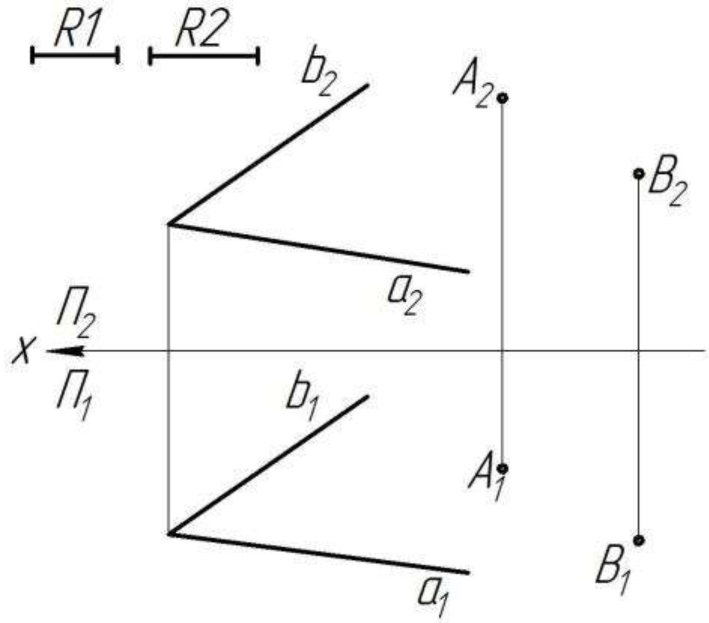
ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Образец решения заданий итогового контроля при проверке уровня сформированности исследовательской компетенции будущих инженеров (после эксперимента)

1 вариант

Задача 1.

Даны плоскость $Q(a \cap b)$ и точки A и B, ей не принадлежащие. В плоскости Q построить точки, удаленные от точки A на расстоянии R_1, и от точки B на расстоянии R_2.



Решение:

<u>Анализ</u>: 1) Искомым объектом задачи является множество точек. Размерность множества точек пространства E_3: $D_3^0 = (3-0)(0+1) = 3$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна трем.

В задаче задано три условия:

Условие *У1* – принадлежность точки плоскости: e_2^0. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_2^0) = 1$.

Условие *У2* – равноудаленность множества точек от точки – это геометрическое место точек, представляющих собой сферу. Поверхность, в том числе сфера, это непрерывные однопараметрическое (одномерное) множество линий, имеющих единый закон образования.

При этом условие *У2* в задаче повторяется дважды: относительно точки *А* и относительно точки *В*. Суммарная размерность заданных в задаче условий равна трем.

3) Размерность множества искомых объектов равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

Исследование: 1) Для проверки условий задачи на критерий совместности рассмотрим произведение заданных условий и проведем их редукцию: $e_2^{,0} \cdot (e_2^0)^2 = e_2^0 \cdot e_1^0 = 2e_0^0$. Удалось провести редукцию произведения условий к более простому виду, то есть условия задачи совместны.

2) В результате процесса редукции получили $2e_0^0$, что является символьным представлением двух точек, то есть ответом задачи буду 2 точки.

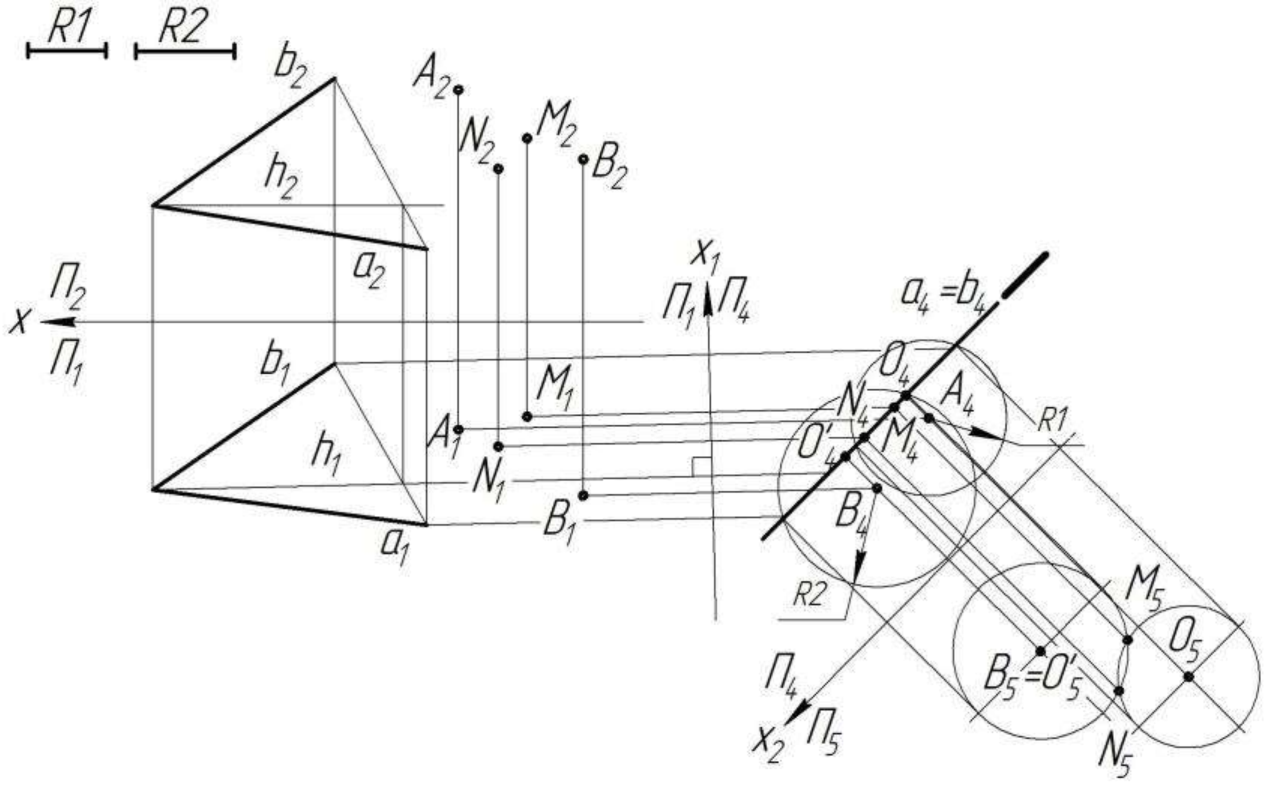
Построение:

Выполним компиляцию возможных алгоритмов решения задачи путем перебора различных последовательностей их выполнения.

Первый алгоритм: $(У1 \times У2) \times У2$.

По этому алгоритму первым действием следует выполнить произведение условий: $e_2^{,0} \cdot e_2^0 = e_1^0$, что означает построение точек пересечения заданной плоскости $Q(a \cap b)$ и сферы – геометрического места точек, равноудаленных от одной из двух заданных точек, например точки *А*. Результатом этого построения будет окружность.

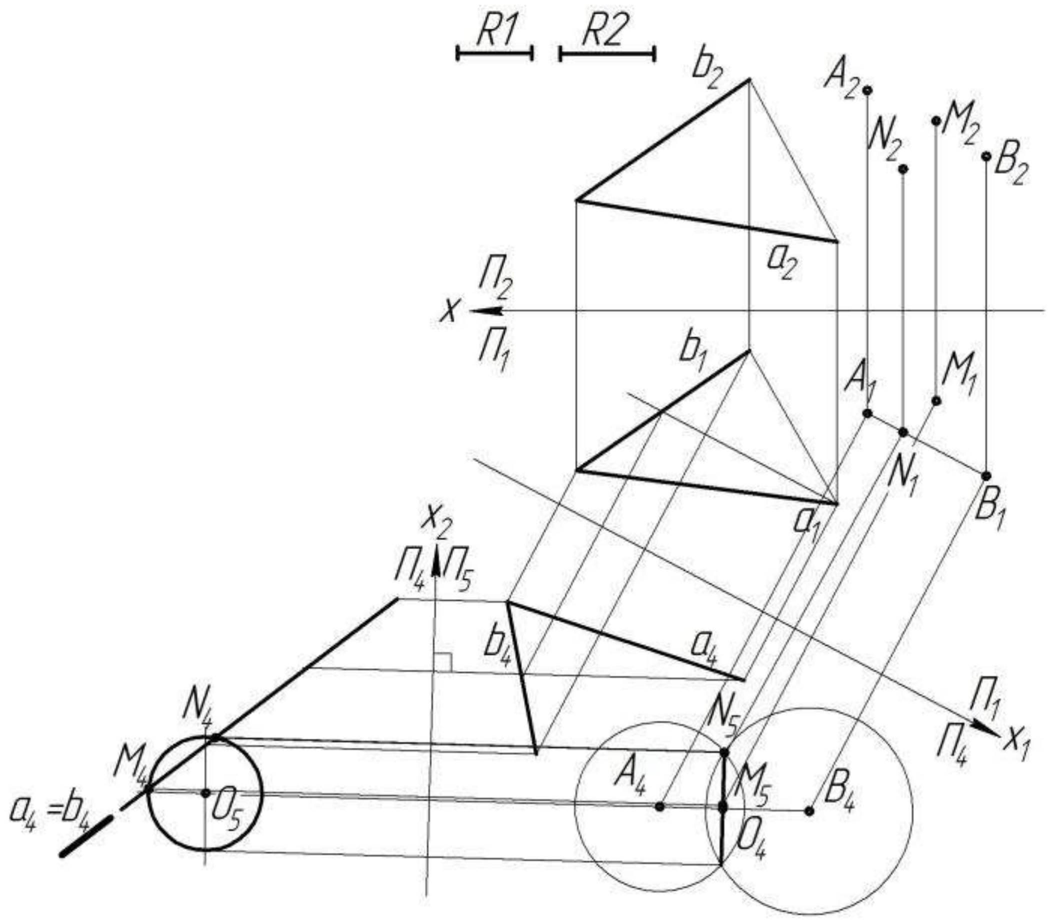
Второе действие: $e_1^0 \cdot e_2^0 = 2e_0^0$– нахождение точек пересечения построенной окружности со сферой, как геометрическим местом точек, равноудаленных от второй заданной точки – точки *B*.



<u>Второй алгоритм:</u> $(У2 \times У2) \times У1$.

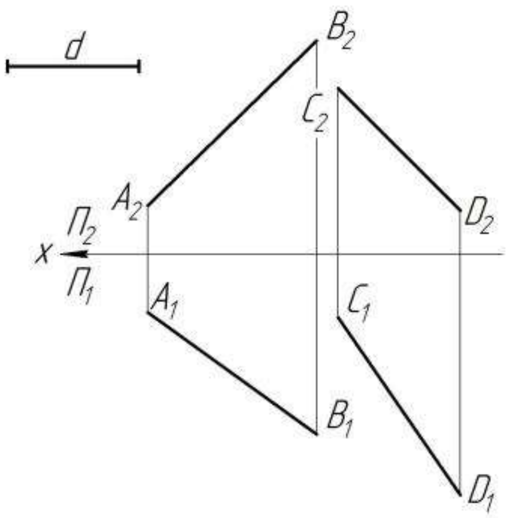
Первым действием будет одновременное выполнение повторяющегося условия *У2*: $(e_2^0)^2 = e_1^0$. Результатом данного действия является окружность – линия пересечения двух окружностей. Каждая из окружностей является геометрическим местом точек, равноудаленных от заданной точки – точек *A* и *B*, соответственно.

Второе действие предполагает выполнение произведения условий: $e_1^0 \cdot e_1^0 = 2e_0^0$, что представляет собой точки пересечения построенной окружности и заданной плоскости $Q(a \cap b)$.



<u>Вывод</u>: В данном случае нет возможности выбрать оптимальный алгоритм решения, так как оба способа решения являются равнозначными – в обоих случаях выполняется две замены системы плоскостей проекций.

Задача 2. Даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Провести прямые, пересекающие AB, параллельные CD и отстоящие от CD на заданное расстояние d .



Решение:

Анализ: 1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано три условия:

Условие *У1* – пересечение искомого множества прямых заданной прямой *AB*: $\mathrm{e}_{3,1}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\mathrm{e}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Условие *У2* – параллельность искомых прямых относительно заданной прямой *CD*: $\tilde{e}_{3,0}^{1,0}$. Размерность равна: $Q_{//}(\tilde{e}_{3,0}^{1,0}) = 1\cdot 1(2-1-1+1\cdot 1) = 1$.

Условие *У3* – удаленность множества прямых от прямой – это цилиндрическая поверхность вращения в размерностью равной двум: $2e_{3,1}^{1,0}$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 1+1+2=4.

3) Размерность множества искомых объектов равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

Исследование: 1) Для проверки условий задачи на критерий совместности рассмотрим произведение заданных условий и проведем их редукцию: $e_{3,1}^{1,0}\cdot\tilde{e}_{3,0}^{1,0}\cdot 2e_{3,1}^{1,0} = e_{2,0}^{1,0}\cdot 2e_{3,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукцию произведения условий к более простому виду провести удалось, следовательно, условия задачи совместны.

2) В результате процесса редукции получили $2e_{1,0}^{1,0}$, что является символьным представлением двух прямых, то есть ответом задачи буду две прямые линии.

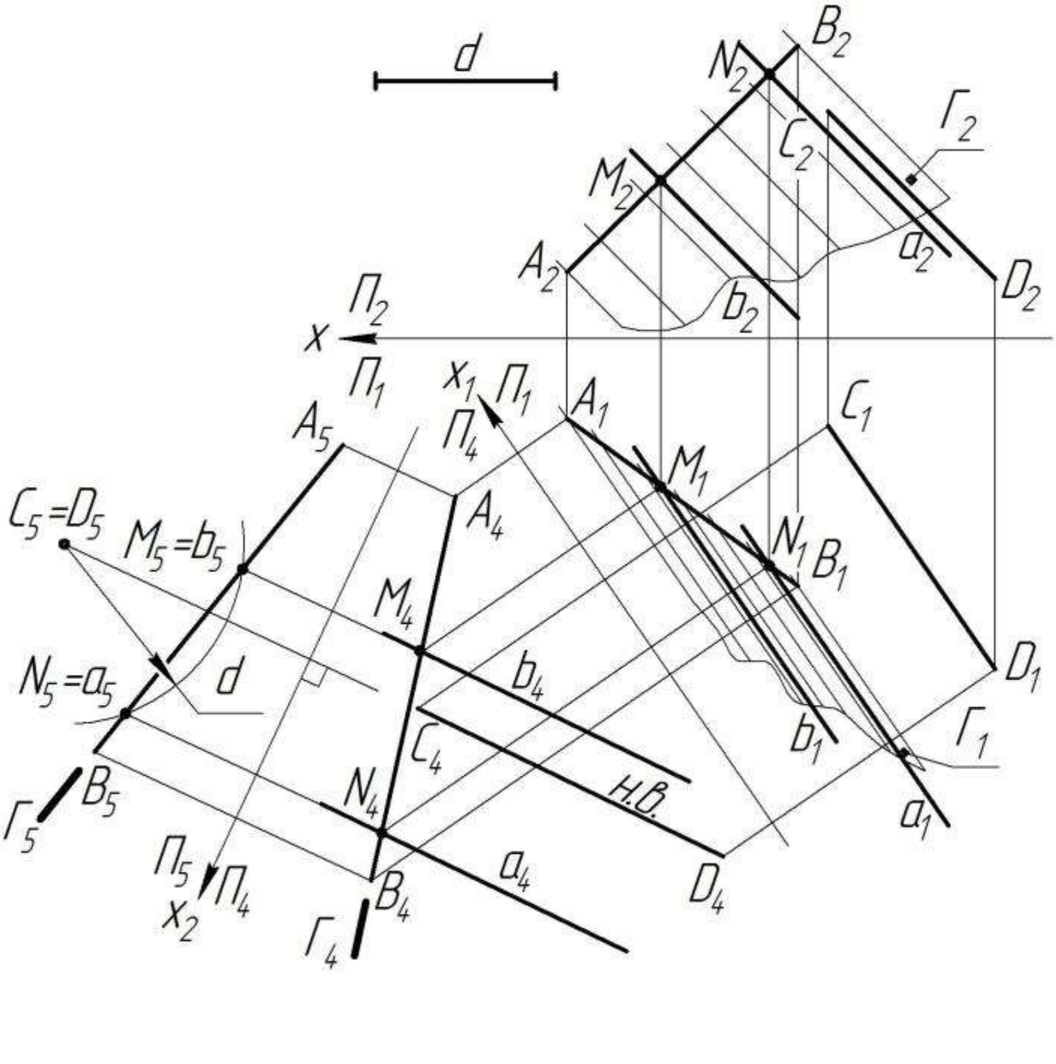
Построение:

Выполним компиляцию возможных алгоритмов решения задачи путем перебора различных последовательностей их выполнения.

Первый алгоритм: $(У1\times У2)\times У3$.

По этому алгоритму первым действием следует выполнить произведение условий: $e_{3,1}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,0}^{1,0} = e_{2,0}^{1,0}$, что означает построение множества прямых линий, пересекающих заданную прямую *AB* и в каждом своем расположении остающихся параллельными прямой *CD*. Результатом этого построения будет пучок прямых линий, пересекающихся в бесконечно удаленной точке, т. е. параллельных между собой и пересекающих прямую *AB*.

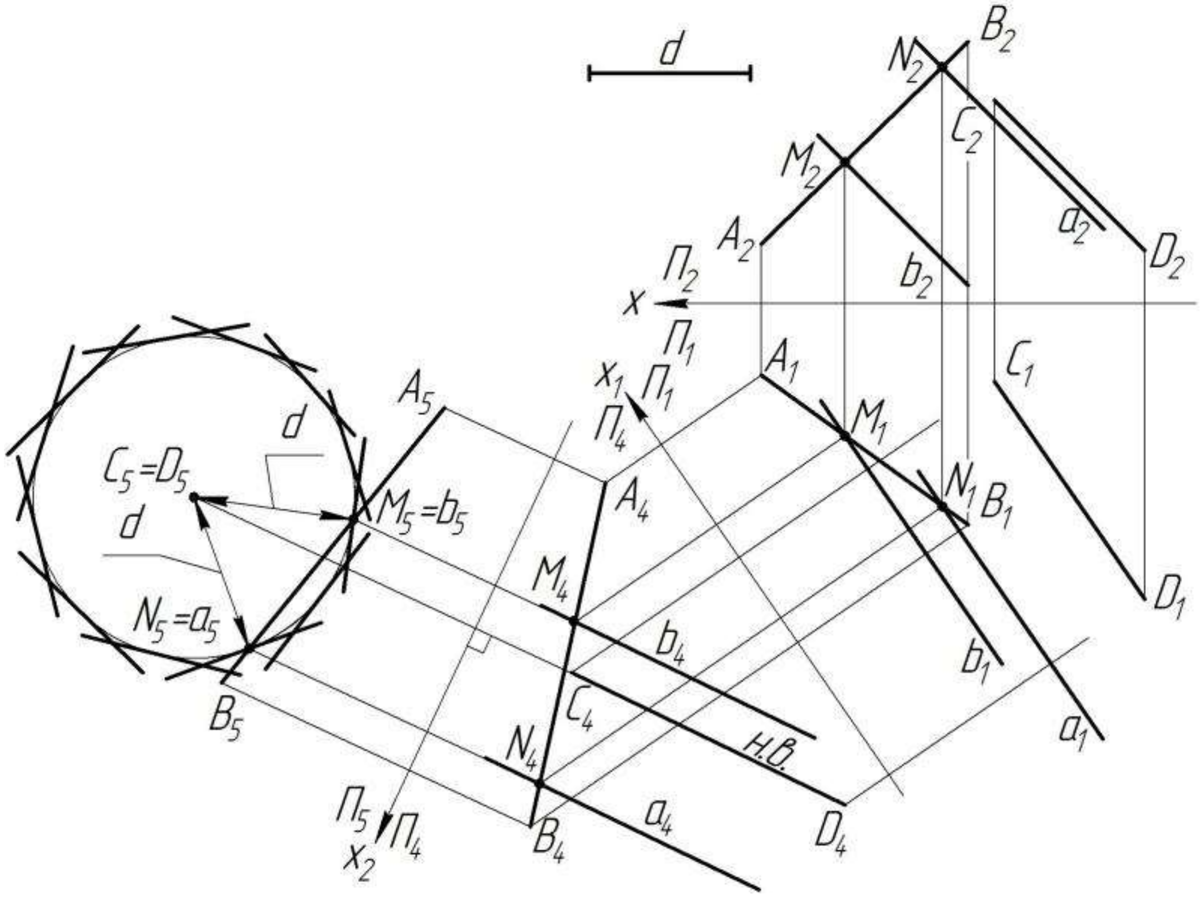
Второе действие: $e_{2,0}^{1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$ – выбор из построенного пучка прямых тех прямых, которые отстоят от прямой *CD* на заданном расстоянии *d*.



<u>Второй алгоритм:</u> $(У1 \times У3) \times У2$.

Первым действием следует выполнить произведение условий: $e_{3,1}^{1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = e_{3,1}^{1,0} \cdot (e_{3,1}^{1,0})^2 = (e_{3,1}^{1,0})^3 = 2e_{2,0}^{1,0}$, что представляет собой два пучка прямых – две плоскости, выбранные из пучка плоскостей, отстоящих от заданной прямой *CD* на расстоянии *d*, т. е. из множества плоскостей, касающихся цилиндрической поверхности, осью которой является прямая *CD*.

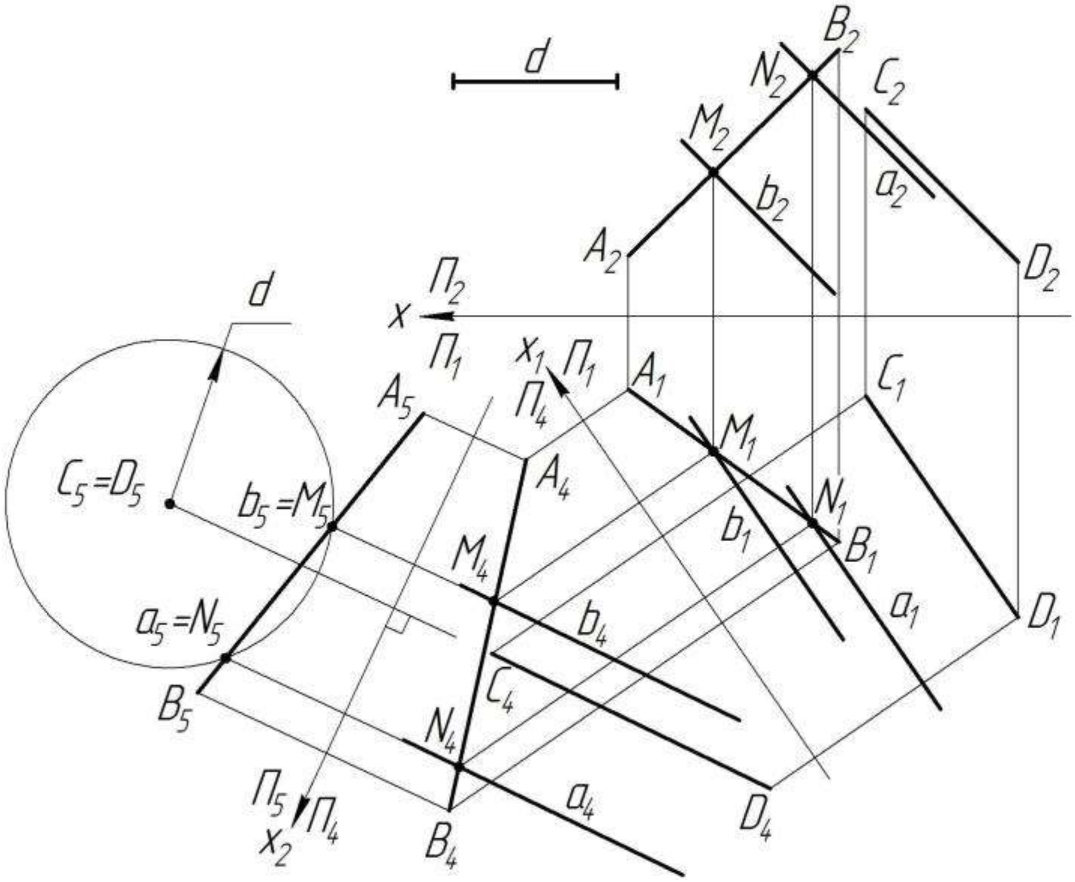
Второе действие предполагает выполнение произведения условий: $2e_{2,0}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,0}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$. Результатом данного действия являются две прямые, выбранные из двух построенных пучков прямых. Это будут прямые, параллельные заданной прямой CD.



<u>Третий алгоритм:</u> $(У2 \times У3) \times У1$.

Первым этапом выполнения алгоритма будет: $\tilde{e}_{3,0}^{1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = 2e_{2,0}^{1,0}$ – пучок прямых с несобственным центром, расположенным на прямой *CD* и отстоящих от нее на расстоянии *d* – представляющие собой цилиндрическую поверхность вращения с осью *CD*.

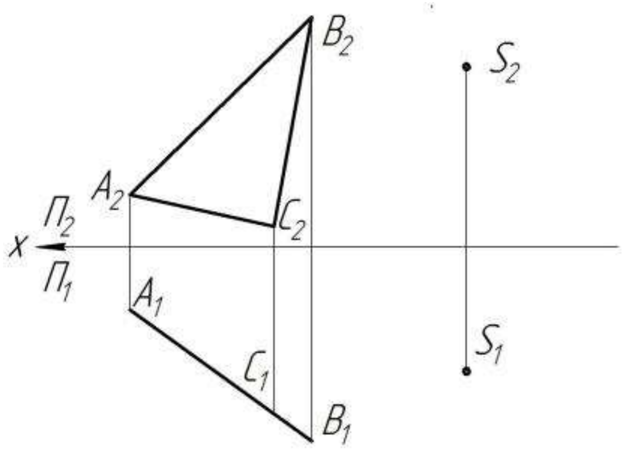
Второй этап реализуется через: $2e^{1,0}_{2,0} \cdot e^{1,0}_{3,1} = 2e^{1,0}_{1,0}$ – две прямые (образующие), выбранные из построенного множества прямых линий по условию пересечения их с прямой *AB*.



<u>Вывод</u>: Для решения данной задачи оптимальным алгоритмом решения будет третий алгоритм, так как в первых двух требуется построить множество прямых, либо множество плоскостей, что трудоемко, а, следственно, нецелесообразно.

2 вариант

Задача 1. Даны точка S и горизонтально-проецирующая плоскость $\{\Delta ABC\}$. Через точку S провести прямые, наклоненные к горизонтальной плоскости проекций под углом $60°$ и параллельные заданной плоскости $\{\Delta ABC\}$.



Решение:

Анализ: 1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано три условия:

Условие *У1* – прохождение искомого множества прямых через заданную точку S: $e_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\mathrm{e}_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – наклоненность к плоскости *П1* под заданным углом 60°: $2e_{3,1}^{1,0}$. Размерность этого условия равна: $Q_{об}(2\mathrm{e}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Условие *У3* – параллельность прямой заданной плоскости $\{\Delta ABC\}$: $\tilde{e}_{3,1}^{1,0}$.

Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\tilde{\mathrm{e}}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+1+1=4.

3) Размерность множества искомых объектов равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

Исследование: 1) Для проверки условий задачи на критерий совместности рассмотрим произведение заданных условий и проведем их редукцию:

$e_{3,0}^{,1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,1}^{1,0} = 2e_{2,0}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукцию произведения условий провести удалось, поэтому условия задачи совместны и задача имеет решение.

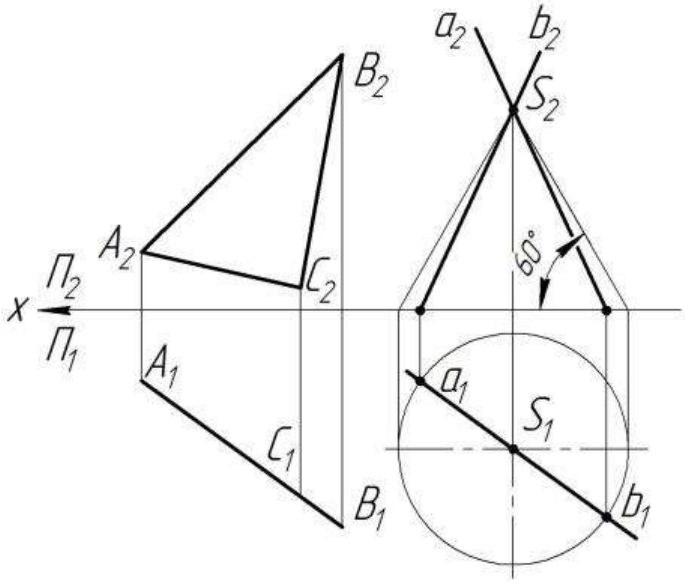
2) В результате процесса редукции получили $2e_{1,0}^{1,0}$, что является символьно-кодовым представлением двух прямых, то есть ответом задачи буду две прямые.

Построение:

Выполним компиляцию возможных алгоритмов решения задачи путем перебора различных последовательностей их выполнения.

Первый алгоритм: $(У1 \times У2) \times У3$.

По этому алгоритму первым действием следует выполнить произведение условий: $e_{3,0}^{,1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = 2e_{2,0}^{1,0}$, что означает построение множества прямых, проходящих через точку S и наклоненных к плоскости *П1* под углом 60°. Данное множество прямых представляет собой коническую поверхность вращения с вершиной *S* и углом наклона образующих к основанию в 60°.

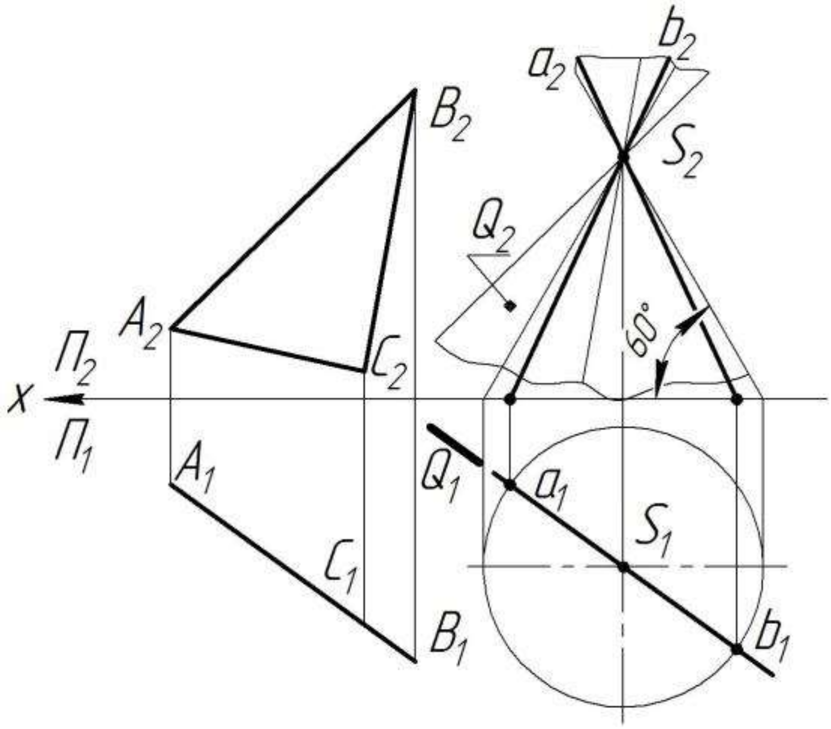


Второе действие: $2e_{2,0}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$ – нахождение двух прямых a и b, являющихся линией пересечения построенной конической поверхности с заданной плоскостью.

Второй алгоритм: $(У1 \times У3) \times У2$.

Первым действием следует выполнить произведение условий: $e_{3,0}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,1}^{1,0} = e_{2,0}^{1,0}$, что представляет собой пучок прямых – плоскость, проходящую через точку, параллельную заданной плоскости.

Второе действие предполагает выполнение произведения условий: $e_{2,0}^{1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = e_{2,0}^{1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$. Результатом данного действия являются две прямые, выбранные из построенного пучка прямых. Это будут прямые a и b, наклоненные к плоскости *П1* под углом 60°.

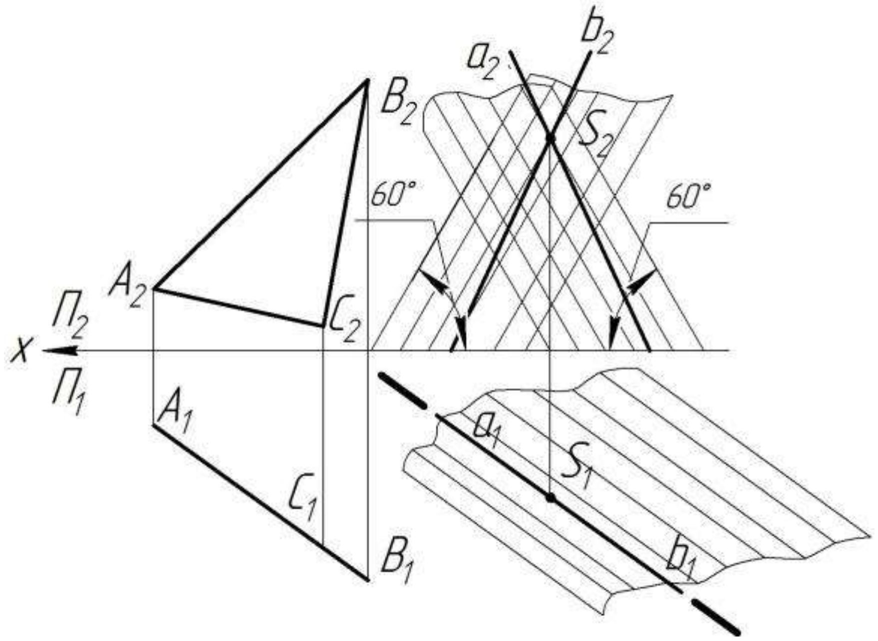


Третий алгоритм: $(У2 \times У3) \times У1$.

Первым этапом выполнения алгоритма будет: $2e_{3,1}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,1}^{1,0} = 2(e_{3,1}^{1,0})^2 = 2(e_{3,0}^{1,0} + e_{2,1}^{1,0})$ – множество, представляющее собой связку прямых и плоское поле прямых, взятые дважды.

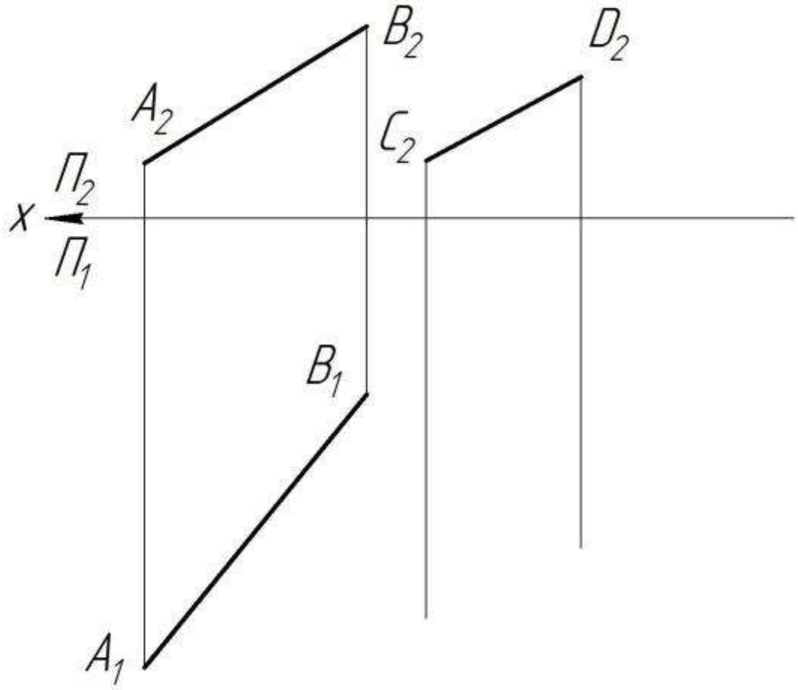
Второй этап реализуется через: $2(e_{3,0}^{1,0} + e_{2,1}^{1,0}) \cdot e_{3,0}^{1,0} = 2(e_{3,0}^{1,0})^2 + e_{2,1}^{1,0} \cdot e_{3,0}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$ – две прямые, выбранные из множества, построенного на предыдущем этапе, на основе удовлетворения условию прохождения через заданную точку S.

При этом условия $e_{2,1}^{1,0}$ (поле прямых) и $e_{3,0}^{1,0}$ (связка прямых) несовместны в случае не прохождения плоскости поля прямых через центр связки. Поэтому в процессе проведения редукции мы пренебрегли произведением этих условий.



<u>Вывод</u>: Для решения данной задачи оптимальным алгоритмом решения будет первый алгоритм, так как во вторых двух требуется построить множество прямых – пучок прямых, либо две связки прямых и два плоских поля прямых, что физически невозможно выполнить в полном объеме, а, следственно, нецелесообразно.

Задача 2. Даны прямая AB и фронтальная проекция прямой CD. Построить горизонтальную проекцию прямой CD, если расстояние между AB и CD равно d.



Решение:

<u>*Анализ*</u>: 1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано три условия, два из которых являются повторяющимися:

Условие *У1* – это повторяющееся условие расположения точки (*C*, *D*) от плоскости проекций *П1*, которое задано графически на чертеже, имеет размерность равную единице и условно может быть обозначено: $2e_{3,1}^{1,0}$, т. е. как расстояние от точки до прямой – от заданной проекции точки (C_2 и D_2) до координатной оси (оси *OX*).

Условие *У2* – удаленность от заданной прямой *AB* искомого множества прямых, т. е. удаленность плоскости от прямой на расстояние *d*: $2e_{2,1}^{1,0}$. Размерность этого условия равна двум.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2*1+2=4.

3) Размерность множества искомых объектов равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

<u>*Исследование*</u>: 1) Для проверки условий задачи на критерий совместности рассмотрим произведение заданных условий и проведем их редукцию:

$(2e_{3,1}^{1,0})^2 \cdot 2e_{2,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукцию произведения условий к более простому виду провести удалось, следовательно, условия задачи совместны.

2) В результате процесса редукции получили $2e_{1,0}^{1,0}$, что является символьно-кодовым представлением двух прямых, то есть ответом задачи будут две прямые.

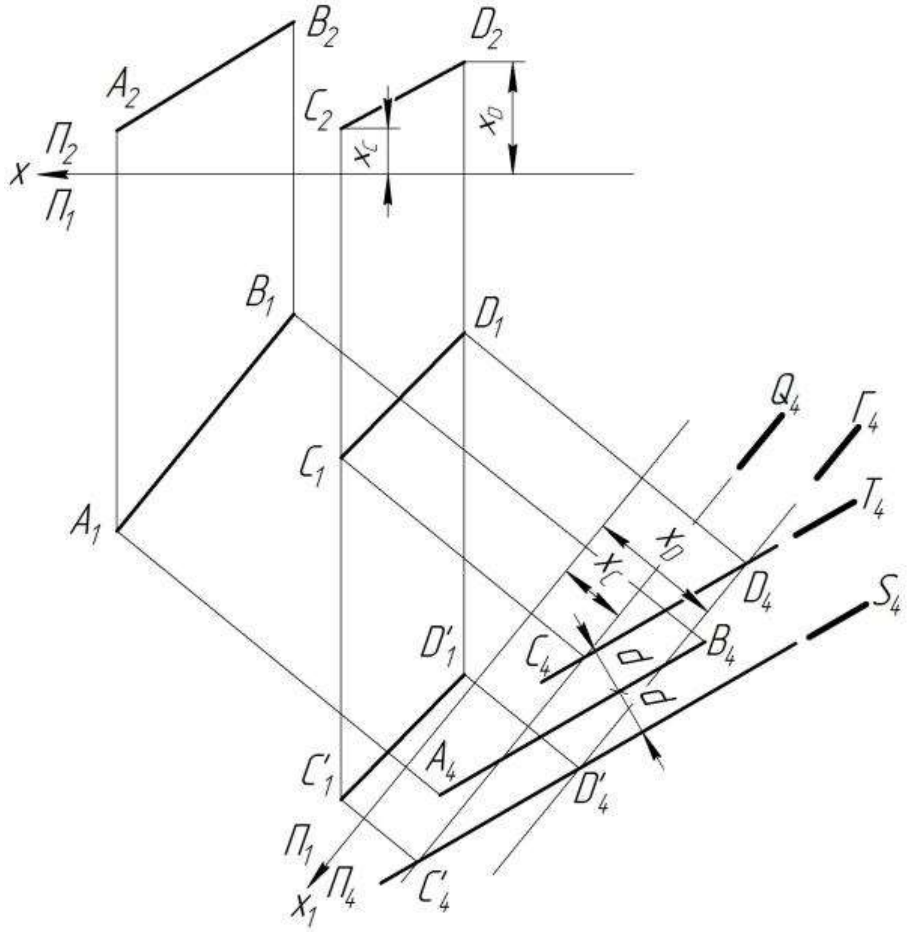
<u>*Построение*</u>:

Выполним компиляцию возможных алгоритмов решения задачи путем перебора различных последовательностей их выполнения.

<u>Первый алгоритм:</u> $(У1 \times У1) \times У2$.

Первым действием следует выполнить произведение условий: $(2e_{3,1}^{1,0})^2 = 2(e_{3,0}^{1,0} + e_{2,1}^{1,0})$, что означает построение двух связок прямых и плоских полей прямых. Результатом этого построения после замены системы плоскостей проекций будут два проецирующих плоских поля прямых *Q* и *Г*, отстоящих от координатной оси в «новой» системе плоскостей проекций на тех же расстояниях, что и заданные проекции точек *C* и *D* (C_2 и D_2) от координатной оси *OX*.

Второе действие: $2(e_{3,0}^{1,0} + e_{2,1}^{1,0}) \cdot 2e_{2,1}^{1,0} = 2(e_{2,1}^{1,0})^2 = 2e_{1,0}^{1,0}$ – построение проекций двух прямых, как результата пересечения построенных проекций плоских полей с проекциями проецирующих пучков прямых, отстоящих от заданной прямой *AB* на заданном расстоянии *d*.



<u>Второй алгоритм:</u> $(У1 \times У2) \times У1$.

Первым действием будет выполнение условия: $2e^{1,0}_{3,1} \cdot 2e^{1,0}_{2,1} = 2e^{1,0}_{2,0}$. Результатом данного действия будет пучок прямых, проходящих через точку, отстоящую от плоскости проекций *П1* на заданное расстояние и отстоящие от заданной прямой *AB* на заданном расстоянии *d*, т. е. касающиеся некоторой цилиндрической поверхности, осью которой является прямая *AB* с радиусом основания равным *d*.

Второе действие предполагает выбор из каждого из двух пучков прямых, которые еще проходят и через вторую точку, заданную только одной своей проекцией: $2e^{1,0}_{2,0} \cdot 2e^{1,0}_{3,1} = 2e^{1,0}_{1,0}$.

<u>*Вывод*</u>: Второй алгоритм может быть полностью реализован только теоретически и поэтому оптимальным и единственным алгоритмом решения данной задачи будет первый алгоритм.

1 и 2 вариант

Задача 3. Составить 3 корректных задачи с совместными условиями, в которых требуется найти множество прямых евклидова пространства, используя геометрические условия из следующего списка:

1) Прямая проходит через точку
2) Прямая пересекает прямую
3) Прямая параллельна прямой
4) Прямая перпендикулярна прямой
5) Прямая наклонена к прямой под данным углом
6) Прямая отстоит от прямой на данном расстоянии
7) Прямая пересекает плоскость
8) Прямая принадлежит плоскости
9) Прямая параллельна плоскости
10) Прямая перпендикулярна плоскости
11) Прямая наклонена к плоскости под данным углом
12) Прямая отстоит от плоскости на данном расстоянии

Условия в задаче могут повторяться, например, «…прямая проходит через две точки..», «…прямая пересекает две прямые…» и т. д.

Решение:

Задача №1. Простроить прямую, проходящую через точки *A* и *B*.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано два одинаковых условия:

Условие *У1* – прохождения искомого множества прямых через заданную точку *A*: $e_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – прохождения искомого множества прямых через заданную точку *B*: $e_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+2=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e_{3,0}^{1,0} \cdot e_{3,0}^{1,0} = e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и притом единственное.

Задача №2. Простройте прямую, проходящую через заданную точку *A*, параллельно двум заданным плоскостям *Q* и *Σ.*

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано три условия:

Условие *У1* – прохождения искомого множества прямых через заданную точку *A*: $e_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – параллельность искомого множества прямых заданной плоскости *Q*: $\tilde{e}_{3,1}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\tilde{e}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Условие *У3* – параллельность искомого множества прямых заданной плоскости *Σ*: $\tilde{e}_{3,1}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\tilde{e}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+1+1=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e^{1,0}_{3,0}\cdot(\tilde{e}^{1,0}_{3,1})^2=e^{1,0}_{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и притом единственное.

Задача №3. Заданы прямая *AB* и точка *M*. Постройте прямую *EF*, проходящую через заданную точку *M* и параллельную прямой *AB*.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D^1_3=(3-1)(1+1)=4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано два условия:

Условие *У1* – прохождения искомого множества прямых через заданную точку *M*: $e^{1,0}_{3,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e^{1,0}_{3,0})=2$.

Условие *У2* – параллельность искомого множества прямых заданной прямой *AB*: $\tilde{e}^{1,0}_{3,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\tilde{e}^{1,0}_{3,0})=2$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+2=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e^{1,0}_{3,0}\cdot\tilde{e}^{1,0}_{3,0}=(e^{1,0}_{3,0})^2=e^{1,0}_{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и притом единственное.

Задача №4. Заданы две плоскости общего положения $\{\Delta ABC\}$ и $\{\Delta DEF\}$. В плоскости $\{\Delta DEF\}$ найти прямую, отстоящую от плоскости $\{\Delta ABC\}$ на расстоянии d.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано два условия:

Условие *У1* – принадлежность искомой прямой плоскости $\{\Delta DEF\}$: $e_{2,1}^{1,0}$.

Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_{2,1}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – расположение искомой прямой относительно плоскости $\{\Delta ABC\}$ на расстоянии *d*: $2e_{2,1}^{1,0}$. Размерность данного условия равна:

$Q_{об}(2e_{2,1}^{1,0}) = 2$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+2=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e_{2,1}^{1,0} \cdot 2e_{2,1}^{1,0} = 2(e_{2,1}^{1,0})^2 = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решения, возможных ответов – два.

Задача №5. В заданной плоскости Q пространства прямую m, равнонаклоненную к двум заданным пересекающимся плоскостям *Т* и *Г*.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано два условия, одно из которых является двойным условием:

Условие *У1* – принадлежность искомой прямой плоскости Q: $e_{2,1}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_{2,1}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – равнонаклоненность искомой прямой относительно каждой из двух заданных пересекающихся плоскостей *Т* и *Г*: $2e_{3,1}^{1,0}$ и $2e_{3,1}^{1,0}$. Размерность каждого из этих условий равна: $Q_{об}(2\mathrm{e}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+2*1=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e_{2,1}^{1,0} \cdot (2e_{3,1}^{1,0})^2 = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решения и возможных ответов – два.

Задача №6. Простроить прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярно заданной плоскости общего положения.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано два условия:

Условие *У1* – прохождение прямой через заданную точку: $e_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\mathrm{e}_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – перпендикулярность искомой прямой заданной плоскости общего положения: $\bar{e}_{3,0}^{1,0}$. Размерность каждого из этих условий равна:

$Q_{об}(2\mathrm{e}_{3,1}^{1,0}) = 2$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+2=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e_{3,0}^{1,0} \cdot \bar{e}_{3,0}^{1,0} = (e_{3,0}^{1,0})^2 = e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и притом единственное.

Задача №7. Через точку *М* провести прямую, параллельную плоскости проекций *П2* и наклоненную к заданной плоскости $\{\Delta DEF\}$ под углом 30°.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано три условия:

Условие *У1* – прохождение прямой через заданную точку *М*: $e_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(e_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – параллельность искомой прямой плоскости: $\tilde{e}_{3,1}^{1,0}$. Размерность каждого из этих условий равна: $Q_{об}(\tilde{e}_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Условие *У3* – наклоненность искомой прямой к заданной плоскости: $2e_{3,1}^{1,0}$. Размерность каждого из этих условий равна: $Q_{об}(2e_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+1+1=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$e_{3,0}^{1,0} \cdot \tilde{e}_{3,0}^{1,0} \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = (e_{3,0}^{1,0})^2 \cdot 2e_{3,1}^{1,0} = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и возможных ответов – два.

Задача №8. Заданы две параллельные прямые a и b. Найти множество прямых параллельных заданным прямым и отстоящих от прямой a на расстоянии d, а от прямой b на расстояние l.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано четыре условия, которые являются попарно повторяющимися:

Условие *У1* – параллельность прямой заданной прямой: $\tilde{e}_{3,0}^{1,0}$. Размерность данного условия равна: $Q_{об}(\tilde{e}_{3,0}^{1,0}) = 2$.

Условие *У2* – искомая прямая отстоит от заданной прямой на заданное расстояние: $e_{3,1}^{1,0}$. Размерность этого условия равна: $Q_{об}(e_{3,1}^{1,0}) = 1$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2+2*1=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$2(\tilde{e}_{3,0}^{1,0})^2 \cdot (e_{3,1}^{1,0})^2 = 2(\tilde{e}_{3,0}^{1,0} \cdot e_{3,1}^{1,0})(\tilde{e}_{3,0}^{1,0} \cdot e_{3,1}^{1,0}) = 2(e_{2,0}^{1,0} \cdot e_{2,0}^{1,0}) = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и возможных ответов – два.

Задача №9. Заданы две непараллельные плоскости общего положения. Найти множество прямых линий отстоящих от каждой из плоскостей на расстоянии d.

Исследование на корректность и совместность условий:

1) Искомым объектом задачи является множество прямых. Размерность множества прямых пространства E_3: $D_3^1 = (3-1)(1+1) = 4$.

2) Суммарная размерность условий задачи также должна быть равна четырем. В задаче задано одно повторяющееся условие:

Условие *У1* – расположение прямой относительно заданной плоскости на заданное расстояние: $2e_{2,1}^{1,0}$. Размерность данного условия равна:

$Q_{об}(2\mathrm{e}_{2,1}^{1,0}) = 2$.

Суммарная размерность заданных в задаче условий равна: 2*2=4.

3) Размерность искомого объекта равна суммарной размерности условий задачи, следовательно, задача сформулирована корректно, заданных условий достаточно для ее решения.

4) Проверка условий задачи на критерий совместности:

$(2e_{2,1}^{1,0})^2 = 2(e_{2,1}^{1,0})^2 = 2e_{1,0}^{1,0}$. Редукция условий возможна, следовательно, условия задачи совместны, задача имеет решение и возможных ответов – два.