Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Российский университет дружбы народов»

На правах рукописи

ВАКДЖИРА МЕРГИЯ БАЛЧА

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доктор физико-математических наук,
доцент Коняев Юрий Александрович

Специальность 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика)

Москва 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. На пороге новых научно-технических свершений, развития робототехники, самых передовых энергосберегающих, информационных и нано технологий, в России, Эфиопии, других странах мира остро встал вопрос о переводе инженерного образования на более современные рельсы обучения с использованием всех достижений современной математики, имеющих как фундаментальное, так и прикладное значение. Математика в техническом вузе является методологической основой естественнонаучного знания. Знание математических методов на современном этапе развития производственного процесса перестает служить только целям общего развития и приобретения навыков элементарных расчетов, а математический склад мышления становится необходимым для специалистов основных направлений научной и практической деятельности. Изучение курса высшей математики формирует у студентов как теоретическую базу для усвоения общих профессиональных и специальных дисциплин, так и практические умения, позволяющие будущему инженеру находить рациональные решения проблемных задач прикладного направления. В связи с этим возрастают требования к качеству знаний и уровню подготовки бакалавров технического профиля по математике.

Необходимость совершенствования содержания курса высшей математики, обновления методики преподавания математики в вузе обусловлена переходом к многоуровневой системе высшего профессионального образования, а также с введением в 2011 году новых Федеральных образовательных стандартов общего и высшего профессионального образования.

Проблему совершенствования методики обучения математике в высшей школе исследовали с позиции интенсификации учебного процесса в вузе и оптимизации математического образования А.А. Аданников, В.В. Афанасьев, Н.В. Аммосова, В.А.Далингер, А.Ж. Жафяров, В.М.Монахов, А.Г.Мордкович, А.Х.Назиев, Е.Н.Трофимец, Л.В.Шкерина и др. За последние годы проведен целый ряд исследований, касающихся проблем профессиональной направленности обучения математике в высших учебных заведениях. Проблемы математического образования в технических университетах нашли отражение в работах многих математиков и методистов М.С. Аммосовой, В.Ф. Бутузова, Г.В. Дорофеева, Л.Д. Кудрявцева, С.М. Никольского, С.А. Розановой, Н.Х. Розова, М.А. Родионова, Е.И. Смирнова, Г.М. Семеновой, Г.Н. Яковлева и других исследователей.

При формировании содержания математического образования, роль внешней среды играет будущая профессиональная деятельность. Проецируя общую ценностно-целевую иерархию образования на область математического образования будущих инженеров, определены приоритеты в обучении математике инженеров. Анализируя работы математиков Б.Д.Гнеденко, А.Н.Колмогорова, Л.Д.Кудрявцева, А. Г. Постникова, А.Ренье, Д. Пойя, А.Пуанкаре, А. Я. Хинчина и др., можно убедиться в единстве их мнения в вопросе о цели обучения и воспитания студентов в процессе обучения математике. Главной целью математического образования является воспитание математической культуры мышления, которая представляет собой некий сплав основ математического знания, логического мышления и математической интуиции. Однако, эта цель не является единственной. Ученые указывают и на необходимость отражения в системе математического образования инженеров как общей задачи профессионального обучения – формирование исследовательской деятельности обучающихся, воспитания «привычки самостоятельного поиска нового, в вере в свои силы и в способности длительное время сосредоточивать мысли на волнующей проблеме, на разыскивании путей ее решения» [41]. Таким образом, математическую подготовку в техническом университете следует активизировать в направлении формирования исследовательской деятельности студентов. От качества математической подготовки в значительной степени зависит уровень сформированности профессиональной компетентности будущего инженера.

Анализ научной литературы показал, что вопросы формирования и организации исследовательской деятельности студентов рассмотрены в трудах различных педагогов и психологов. Вопросы общей теории деятельности раскрываются в трудах Л.С. Выготского , В.В. Давыдова, И.А. Зимней, А.Н. Леонтьева, С.Л. Рубинштейна, В.Д. Шадрикова, Д.Б. Эльконина и др. Психолого-педагогические основы исследовательской деятельности разработаны С.И. Архангельским, С. И. Брызгаловым, Ю.К. Бабанским, И.А. Зимней, С.И. Зиновьевым, В.А. Крутецким, А.И. Савенковым, Е.Л Шашенковой и др. Проблемами активизации исследовательской деятельности студентов в процессе обучения математике занимались В.В. Афанасьев , Т.А. Воронько, В.А. Гусев, В.А. Далингер, В.Р. Майер, М.А. Осинцева, Н.В.Скоробогатова, Е.А.Зубова, А.В. Ястребов и др. В диссертационных работах исследовательская деятельность студентов рассматривалась как средство развития творческих способностей обучающихся, изучались вопросы формирования исследовательских умений студентов посредством использования информационных технологий. Анализ научных исследований, сравнение результатов анализа и их обобщение, а так же эмпирический анализ процесса обучения математике в вузе, на основе анкетирования и бесед с преподавателями и студентами, выявил недостаточную разработанность методических подходов к организации обучения математике студентов технических вузов, направленного на формирование исследовательской деятельности.

Высокая степень абстракции в представлении информации о понятиях и их свойствах в процессе обучения математике студентов технических вузов обуславливает необходимость такой организации обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучающихся, отражают основные и существенные стороны математических объектов и законов, в том числе, посредством наглядного моделирования математического знания.

Е.И. Смирновым разработана концепция наглядно-модельного обучения, которая нашла отражение в трудах В.С.Абатуровой, В.Л.Жолудевой, Р.М. Зайниева, Т.Н.Карповой, Н.Д. Кучугуровой, И.Н.Муриной, В.Н. Осташкова, Т.В. Скоробогатовой, Е.Н. Трофимец и др.

Отсутствие единства подходов к трактовке наглядного моделирования в обучении, слабое отражение метода моделирования в обучении математике студентов технических вузов, отсутствие методов представления и изложения достижений современной математики в обучении при формировании исследовательской деятельности студентов доказывают актуальность выбранной темы исследования, а именно: «Формирование исследовательской деятельности студентов технических вузов в обучении математике на основе наглядного моделирования».

Констатирующий этап эксперимента подтвердил необходимость систематической работы преподавателей математики, направленной на формирование исследовательской деятельности студентов и позволили выделить ряд противоречий:

– между достаточно высокой степенью абстракции математических знаний и недостаточностью механизмов наглядного представления учебных элементов в обучении математике в техническом вузе на основе моделирования;

– между достаточно высокими развивающими возможностями наглядного моделирования в обучении математике и неразработанностью специфики его применения в процессе формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов;

– между высокими требованиями, предъявляемыми обществом к профессиональной и общекультурной подготовке специалистов в вузе и недостаточностью механизмов обеспечения исследовательского опыта личности в контексте роста профессиональных и общекультурных компетенций студентов технического вуза;

Проблема исследования: Какова методика обучения математике, направленная на формирование исследовательской деятельности студентов технических вузов на основе наглядного моделирования?

Объект исследования – процесс обучения математике студентов технических вузов, направленный на формирование и развитие исследовательской деятельности.

Предмет исследования – наглядное моделирование в обучении математике как основа формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов.

Цель исследования: разработать методику обучения математике студентов технических вузов, направленную на формирование исследовательской деятельности студентов на основе наглядного моделирования.

Гипотеза исследования состоит в предположении, что процесс обучения математике будет способствовать достижению высокого уровня сформированности исследовательской деятельности студентов технических вузов, если:

– освоение математической деятельности студентами будет основано на наглядно-модельном представлении объектов и явлений в процессе обучения математике, ведущем к пониманию существа математической деятельности и развитию мотивационной сферы учения;

– будут применены специальные исследовательские методы освоения математической деятельности (метод аналогии, унитарных преобразований и расщепления) в профессионально-ориентированном обучении математике студентов технических вузов;

– основным механизмом обеспечения роста профессиональных и общекультурных компетенций студентов технических вузов будет фундирование опыта личности в контексте поэтапного развертывания комплексов наглядных моделей.

Достижение цели исследования и проверка сформулированной гипотезы предполагает решение следующих конкретных **задач:**

1. На основе анализа педагогической и методической литературы выделить и систематизировать основные принципы и критерии отбора содержания математического образования в техническом вузе, направленного на формирование исследовательской деятельности студентов.

2. Разработать методику обучения математике студентов технических вузов, направленную на формирование исследовательской деятельности обучающихся на основе наглядного моделирования с учетом последних достижений в области математики.

3. Создать и реализовать комплекс профессионально-ориентированных задач по курсу «Однородные дифференциальные уравнения и математическое моделирование» исследовательского характера, с использованием математических методов наглядного моделирования (метода аналогии, унитарных преобразований и расщепления).

4. С учетом поисковой и творческой активности студентов разработать механизмы роста профессиональных и общекультурных компетенций студентов технических вузов на основе фундирования опыта личности в контексте развертывания комплексов наглядных моделей математических знаний.

5. Экспериментально проверить эффективность разработанной методики обучения математике, направленной на формирование исследовательской деятельности студентов на основе наглядного моделирования.

Для решения поставленных задач и проверки выдвинутой гипотезы использовались следующие **методы исследования:** анализ философской, педагогической и методической литературы по проблеме исследования, сравнение, аналогия и обобщение его результатов. Анализ результатов собственной педагогической деятельности; констатирующий и формирующий эксперименты, методы количественного анализа и статистической обработки полученных данных.

Научная новизна исследования заключается в том, что эффективность формирования и развития исследовательской деятельности студентов технического вуза основана на реализации наглядного моделирования в обучении математике и фундировании опыта личности:

– разработана методика обучения математике, направленная на формирование исследовательской деятельности студентов технических вузов, на основе наглядного моделирования объектов, процессов и явлений в обучении математике в ходе освоения специальных методов исследования (метод аналогии, унитарных преобразований и расщепления);

– впервые обоснован и внедрен в практику обучения бакалавров метод аналогии как эффективный метод математического моделирования в ходе решения профессионально ориентированных задач исследовательского характера (на примере изучения темы: «Однородные дифференциальные уравнения»);

– на основе поэтапного развертывания базовых учебных модулей по математике и учета особенностей исследовательской деятельности студентов – будущих инженеров разработаны фундирующие процедуры наглядного моделирования в освоении математической деятельности.

Теоретическая значимость исследования:

– раскрыта сущность и определены особенности формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов в процессе обучения математике. Особенностью представленной методики является формирование и развитие исследовательской деятельности студентов в единстве мотивационного, операционно-содержательного, и контрольно-оценочного компонентов деятельности на основе наглядного моделирования специальных процедур, отвечающих математической деятельности;

– определены и обоснованы принципы и критерии отбора содержания математической подготовки студентов технических вузов, направленной на формирование исследовательской деятельности обучающегося на основе наглядного моделирования;

– в обогащении теории и методики обучения математике будущих инженеров фундирующими процедурами приобретения, освоения и преобразования исследовательского опыта личности на основе наглядного моделирования:

– выявлены и обоснованы фазы, уровни и критерии развития исследовательской деятельности студентов технических вузов в процессе обучения математике их основе развертывания спиралей фундирования опыта личности в контексте роста общекультурных и профессиональных компетенций.

Практическая значимость исследования заключается в том, что: разработанная методика обучения математике способствует повышению качества обучения математике и формированию профессиональной компетентности бакалавров и магистров технического профиля;

– впервые на примере изучения темы: «Однородные дифференциальные уравнения» обоснован и внедрен в практику обучения математике будущих инженеров метод аналогии как эффективное средство математического моделирования в ходе решения профессионально ориентированных задач исследовательского характера;

– метод аналогии в сочетании с современным вариантом метода расщепления и методом унитарного преобразования позволил изучить целый класс спектральных статических и динамических задач, связанных, в частности, с исследованием модельного уравнения колебаний волнового твердотельного гироскопа (ВТГ);

– при анализе модельных неавтономных линейных и квазилинейных систем ОДУ с периодической матрицей при наличии регулярных возмущений с помощью метода аналогий и метода расщепления сформулированы и доказаны теоремы о приводимости указанных систем к более простым системам с почти диагональной матрицей.

Исследование проводилось поэтапно.

На первом этапе (2009–2010г.г.) изучалась психолого-педагогическая и методическая литература по теме исследования, анализировалось теоретическое состояние проблемы, учитывались факты реального состояния уровня развития исследовательской деятельности студентов, определялись предмет, объект, цели и задачи исследования, рабочая гипотеза. Осуществлялась подготовка и проведение констатирующего эксперимента.

На втором этапе (2010–2012г.г.) уточнялись теоретические положения и ключевые понятия, составляющие основу исследования; разрабатывалась система профессионально-ориентированных задач исследовательского характера; осуществлялась опытно–экспериментальная работа по внедрению их в практику.

На третьем этапе (2012–2013г.г.) проводились систематизация и обобщение результатов экспериментальной работы, уточнение теоретических выводов и положений, внедрение результатов эксперимента, оформление исследования в виде диссертации.

Теоретической основой исследования явились:

– концепция деятельностного подхода к проблеме усвоения знаний (Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, В.В. Давыдов, С.Л. Рубинштейн, В.Д.Шадриков и др.);

– психолого-педагогические основы исследовательской деятельности (С.И. Архангельский, Ю.К. Бабанский, С. И. Брызгалов, И.А. Зимняя, С.И. Зиновьев, В.А. Крутецкий, А.И. Савенков, Е.Л. Шашенкова и др.;

– теория фундирования опыта личности (В.В. Афанасьев, Р.М. Зайниев, Ю.П.Поваренков, Е.И. Смирнов , В.Д. Шадриков и др.);

– компетентностный подход в обучении (И.А.Зимняя, А.Г.Каспржак, Л.Ф. Леванова, О.Е. Лебедев, А.В. Хуторской и др.);

– фундаментальные исследования в области теории и методики обучения математике (В.В. Афанасьев, В. А. Гусев, В.А. Далингер, А.Л.Жохов, Ю.М. Колягин, Н.И. Мерлина, А.Г. Мордкович, С.А. Розанова, Н.Х. Розов, Е.И.

Санина, Г.И.Саранцев, В.С. Секованов, Е. И. Смирнов, Л.В. Шкерина, А.В. Ястребов и др.)

– концепция наглядно-модельного обучения (Е.И. Смирнов, В.С.Абатурова, В.Л.Жолудева, Р.М. Зайниев, Т.Н.Карпова, Н.Д. Кучугурова, И.Н.Мурина, В.Н. Осташков, Т.В. Скоробогатова, Е.Н. Трофимец и др.).

Обоснованность и достоверность результатов исследования обеспечиваются: многосторонним анализом проблемы, опорой на данные современных исследований по теории и методике обучения математике; опорой на фундаментальные исследования психологов, педагогов, методистов-математиков; адекватностью методов исследования целям, предмету и задачам, поставленным в работе; проведенным педагогическим экспериментом и использованием адекватных математико-статистических методов обработки полученных в ходе эксперимента результатов.

Личный вклад заключается в:

– разработке и реализации методики обучения математике студентов технических вузов, направленной на формирование исследовательской деятельности на основе наглядного моделирования;

– определении критериев отбора и содержания банка задач по курсу: «Однородные дифференциальные уравнения», раскрывающих метод аналогии в сочетании с современным вариантом метода расщепления и методом унитарных преобразований как эффективных средств математического моделирования в ходе решения профессионально ориентированных задач исследовательского характера;

– выявлении и обосновании фаз, уровней и критериев развития исследовательской деятельности студентов технических вузов в процессе обучения математике на основе развертывания спиралей фундирования опыта личности в контексте роста общекультурных и профессиональных компетенций.

Эмпирическая база исследования. Основная часть исследования осуществлялась на базе инженерного факультета Российского университета дружбы народов. В эксперименте участвовало около 100 студентов по кафедре строительные конструкции и сооружения. В диссертации обобщен практический опыт автора, накопленный за 10 лет работы в университете Арва Минч (Эфиопия).

Апробация результатов исследования осуществлялась через:

– выступления на научных семинарах по теории и методике обучения математике кафедры высшей математики РУДН, методического семинара Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского;

– публикацию автором работ, отражающих основное содержание исследования;

– участие и выступления, с докладами на научных конференциях:

Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji «Naukowamyślinformacyjnej» Powieki, 7–15 marca 2012 roku, XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции «Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы» – Москва, РУДН, 18–21 апреля 2012 г, международной научной конференции «Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании», Москва, РУДН, 4–6 февраля 2013 г, международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном мире», Москва, РУДН, 24-26– апреля 2013 г.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Базовым механизмом формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов в процессе обучения математике является наглядное моделирование математических объектов, процессов и явлений на основе вариативности, поэтапности и учета особенностей реализации современных математических методов. Наглядно-модельное обучение реализуется в выявлении сущностных характеристик и включает:

– выделение базовых учебных элементов (теория, задачи);

– создание наглядных моделей идеального объекта (схема, образец решения задачи) на основе устойчивости восприятия и понимании;
– взаимный переход знаковых систем в математической деятельности;
– вербальный переход от конкретно-деятельностных аспектов к обобщенным знаковым формам и вариативности субъектного опыта.

2. Формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов на основе наглядного моделирования позволяет осуществлять интеграцию математических, естественнонаучных и методологических знаний средствами математического моделирования. Освоение математической деятельности в обучении математике студентов технических вузов основано на наглядном представлении объектов, процессов и явлений в обучении математике, применении специальных методов изложения знаний (метода аналогии, унитарных преобразований и расщепления) в ходе решения профессионально ориентированных задач исследовательского характера с использованием информационных и коммуникационных технологий.

3. Методика обучения математике студентов технических вузов, направленная на формирование и развитие исследовательской деятельности студентов, раскрывает методологические и функциональные основы метода аналогий, унитарных преобразований и метода расщепления при изучении некоторых классов нелинейных физических и биологических модельных задач и реализуется средствами наглядного моделирования на основе интеграции математических, естественнонаучных и методологических знаний.

4. Формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов в обучении математике реализуется на основе фундирования опыта личности с эффектом развития профессиональных и общекультурных компетенций обучающихся:
– адаптивный этап закладывает актуализацию исследовательских умений и формирует навыки исследовательской деятельности студентов;

– на развивающем этапе происходит развитие компонентов исследовательской деятельности, через освоение специальных математических методов (аналогии, расщепления и унитарных преобразований) и подготовка к решению профессиональных исследовательских задач;

– самоутверждающий этап характеризуется интеграцией специальных, профессиональных знаний и математических знаний, готовностью к исследовательской деятельности.

При этом фундирующие процедуры характеризуются следующим компонентным составом:

– создание условий психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических для обеспечения целостности методической системы обучения математике бакалавров технического профиля;

– определение содержания научного знания учебного курса, вскрытие историко-генетических оснований значимости базовых учебных элементов в интегративной связи с методологией открытия новых знаний;

– реализация интерактивных методов обучения математическому моделированию, в том числе, проблемного, проектного, учебно-деловых игр с презентациями и использованием компьютерных технологий и мультимедиа;

– формирование научного мышления и методологической культуры освоения элементов научного познания в решении профессионально-исследовательских задач математическими методами.

По материалам диссертации имеется 17 публикаций автора.

ГЛАВА I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАПРАВЛЕННОГО НА ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

1.1 Исследовательская деятельность: сущность и структура, уровни и критерии оценки её сформированности у студентов технических вузов

Рассмотрение проблемы подготовки будущих специалистов к исследовательской деятельности требует изучения таких понятий как «исследование», «деятельность», «исследовательская деятельность», «исследовательские умения» и их теоретический анализ.

Более широким в этом ряду является понятие «исследование». Первоначально понятие «исследование» возникло в философии. Данный вопрос рассматривали такие великие философы, как Рене Декарт, Френсис Бэкон, Джон Локк и др. В результате их научной деятельности в области теории познания появились такие методы исследования как наблюдение, эксперимент, теоретический анализ, индукция, дедукция и т.д. Указанные методы являются ведущими в исследованиях и в настоящее время.

В середине и конце XX в. огромный вклад в развитие исследования по методологии внесли К. Поппер, И. Лакатос, И. Фейерабенд и другие выдающиеся философы и ученые. Они основывались на развитии нужного знания и реальной деятельности исследователей.

С развитием науки все больше разрабатывались и обосновывались новые методы и приемы проведения исследований. В России вопросами общей теории исследований занимались Дружинин В.Н. [59], В.А. Васекин [36], П.М Якобсон [169], Г.С. Альтшуллер [4] и др.

В настоящее время проблема развития методологии исследования остаётся актуальной. Широкие возможности в этой области предоставляют современные компьютерные технологии, позволяющие моделировать различные имитационные изучаемые объекты, создавать анимационные изображения различных процессов и т.д.

Таким образом, современные средства и методы исследования позволяют человеку проникнуть «в самые глубины» познаваемых объектов, недоступных для человеческих органов чувств.

Рассмотрим непосредственно понятие «исследование». При его дефиниции в различных источниках наблюдается определенное единство. В большой советской энциклопедии научное исследование – это процесс выработки научных знаний, один из видов познавательной деятельности.

В философии исследование характеризуется как специализированная форма познавательной деятельности, способ в процессе приобретения нового знания. Известные философы Ф. Бэкон [23], И. Лакатос [84], К.Поппер [111], определяли исследование как метод научного познания.

В отличие от непосредственного восприятия, осознания, размышления, исследование предполагает явную фиксацию цели и средств познания с учетом методологических норм воспроизводимости результатов, их доказательности и объективности.

В психологии исследование – общий термин, обозначающий любую попытку изучения проблемы путем сбора и/или анализа данных. Например, Артур Ребер считает, что «любая честная попытка систематически изучить проблему или что-то добавить к человеческому знанию о проблеме может считаться исследованием» [18].

М.А. Вейт указывает, что всякое исследование есть поиск нового знания путем выделения областей известного и неизвестного [37]. А.Н. Поддьяков определяет исследование как одну из фундаментальных форм взаимодействия живых существ с реальным миром, направленную на его изучение и познание этого мира [110].

Любое исследование имеет следующие составные компоненты: постановка задачи, предварительный анализ имеющейся информации; условия и методы решения задач данного класса;

формулировка исходных гипотез;

теоретический анализ гипотез;

планирование и организация эксперимента, анализ и обобщение полученных фактов;

проверка исходных гипотез и окончательная формулировка новых фактов и законов при проведении исследований на производстве [61].

Перечисленные компоненты определяют последовательность любого исследования, независимо от того, в какой области знаний оно осуществляется.

Виды исследований и их классификации были рассмотрены В.Н.Дружининым [59]и систематизированы Р.Е. Мажириной [93].

Эмпирические и теоретические исследования следует дополнить модельными исследованиями, основанными на построении какой-либо модели – аналога исследуемого объекта. Так, по мнению В.Н. Дружинина [59], метод моделирования отличен от теоретического метода, основанного на логических рассуждениях, так и от эмпирического, поскольку моделирование используется тогда, когда невозможно провести экспериментальное исследование, а теоретический анализ слишком громоздок при изучении исследуемого объекта.

Модельные исследования проводятся при рассмотрении объектов, недоступных экспериментальному изучению, или систем, на которых нельзя производить эксперимент по моральным соображениям.

Модельные исследования могут проводиться также исходя из принципа удобства, для большей простоты и экономичности проведения исследования, а также могут дополнять экспериментальные и теоретические исследования.

Исследования также можно различать по их объекту.

Здесь можно выделить педагогические, производственные, социологические и т.д. исследования.

По характеру их проведения исследования можно разделить на субъективные и объективные.

По способу получения знаний исследования можно разделить на ориентировочные, учебные и научные.

Ориентировочные исследования осуществляются неосознанно, при непосредственном взаимодействии с окружающей действительностью. Этот вид исследований обычно осуществляется детьми в младенческом и дошкольном возрасте.

Учебные исследования являются уже осмысленной попыткой получения новых знаний. При этом знание является новым только для субъекта, осуществляющего исследование (это верно и для ориентировочного исследования). Учебные исследования обязательно проводятся под контролем учителя, преподавателя.

Научные исследования проводятся с целью получения объективного знания, имеющего значения не только для субъекта исследования, но и для окружающих. Для осуществления такого рода исследований может быть привлечено специальное оборудование и специализированные лаборатории, при этом может быть задействовано большое количество людей.

С понятием исследования тесно связано понятие исследовательской деятельности, чтобы его рассмотреть остановимся сначала на понятии «деятельность». Это понятие было введено в научную мысль в начале XVII века И. Кантом.

Отечественные философские концепции «деятельности» принадлежат Н.А. Бердяеву, М.Н Бахтину, В.П. Кузьминой.

В психологии концепции деятельности разрабатывались С.Л. Рубинштейном, А.Н. Леонтьевым, В.В.Давыдовым, Б.Г. Ананьевым, К.А. Абульхановой-Славской, Б.М. Тепловым, В.Д. Шадриковым и др.

При этом в работах перечисленных авторов понятие «деятельность» определяется различным способами, это и система, и активность, и со-вокупность, и форма, и способ существования.

Наиболее общий подход к рассматриваемому понятию был осуществлен в философии. Здесь под деятельностью понимается способ существования человека и общества в целом. Если рассмотреть особенности человеческого существования, то можно сказать, что деятельность – это специфическая человеческая форма активного отношения к миру, направленная на его (не всегда) целесообразное изменение и преобразование [15].

Вопросами исследовательской деятельности занимались педагоги и психологи различных школ и направлений А.А. Аршавский, С.М. Бондаренко, И.Я. Гальперин, А.В. Леонтович, А.С. Обухов, А.Н. Поддьяков, В.С. Ротенберг, А. И. Савенков, N.Tibergen, B. Henderson и др.

Анализ психолого-педагогической литературы показал, что «опыт» человека представляется учёными как системный объект, элементами которого являются накапливаемые и личностно осознаваемые знания, умения и навыки.

Под опытом исследовательской деятельности понимаются качественные характеристики личности, формирующиеся в результате накопления и осмысления новых знаний, умений, методов, полученных в процессе осуществления исследовательской деятельности и проявляющиеся в способах получения нового, объективного и системного знания о действительности.

Формирование опыта исследовательской деятельности происходит в процессе ее осуществления, характеризуясь последовательным переходом от репродуктивного уровня овладения деятельностью к творческому [166].

При анализе исследовательской деятельности рассмотрим его составные части.

В философской, психологической и педагогической литературе деятельность трактуется как некий реальный процесс из складывающейся совокупности действий и операций (А.Н. Леонтьев); как взаимосвязь противоположных, но предполагающих акций опредмечивания, т.е. активного преобразования субъектом мира, и распредмечивания (Г.С. Батищев), как активное взаимодействие с окружающей действительностью, в ходе которого живое существо выступает как субъект, целенаправленно, взаимодействующий на объект и удовлетворяющий таким образом свои потребности (С.Л. Рубинштейн); как совокупности определенных видовых форм, необходимых в реальной жизни каждому (игра, учение, труд) и играющих поочередно ведущую роль в онтогенезе (Б.Г. Ананьев); как специфическая форма активного отношения к окружающему миру, содержание которого составляет изменение и преобразование этого мира на основе освоения и развития различных форм культур (Б.С. Гершунский).

Некоторые российские психологи (А.Н.Леонтьев, С.Л. Рубинштейн) считают, что протекание развития различных психических процессов существенно зависят от содержания и структуры деятельности, от ее мотивов, целей и средств. В разработанной А.Н. Леонтьевым концепции развития психики категория «деятельности» занимает важное место и лежит в основе определения понятия активности человека (М.Я. Басов, А. Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн). Леонтьев А.Н. под деятельностью понимает « такие процессы, которые отражают то или иное отношение человека к миру, отвечают особой соответствующей им потребности процессы, которые характеризуются психологически тем, что то, на что направлен данный процесс в целом (его предмет), всегда совпадает с тем, что объективно побуждает субъекта к данной деятельности, т. е. «мотивом» » [90]. Такое определение деятельности означает, что она всегда предметна и мотивированна. Непредметной и немотивированной деятельности, как активного, целенаправленного процесса не существует. По мнению С.Л. Рубинштейна, деятельность – это форма активного целенаправленного взаимодействия человека с окружающим миром (включающим и других людей) [122].

Вместе с тем, проведенные исследования (П.Я. Гальперин, Д.Б.Эльконин) обнаружили, что на основе внешних материальных действий путем их последовательных изменений и сокращений формируются внутренние, идеальные действия, совершающиеся в окружающем мире [166].

По определению А.Г. Асмолова, «деятельность представляет собой динамическую саморазвертывающуюся иерархическую систему взаимодействий субъекта с миром, в процессе которых происходит порождение психического образа, воплощение его в объекте, осуществление и преобразование порождение психическим образом отношений субъекта в предметной действительности [8].

В философии, психологии, педагогике и науковедении «исследовательская» деятельность имеет многоплановое смысловое наполнение и не всегда зависит от того, какое содержание вкладывается в данное понятие, в различенных научных дисциплинах.

Исследовательская деятельность учащихся рассматривается в педагогике как деятельность, направленная на формирования и создание тех сторон характера, которые важны для формирования личности, как общественного субъекта на основе самостоятельного приобретения субъективно новых знаний, умений и навыков[9].

Продуктом исследовательской деятельности являются не только, а может быть, и не столько знания, которые приобретаются, сколько способы познавательной деятельности, которые воздействуют на интеллектуальное развитие личности. В этом аспекте исследовательская деятельность рассматривается как форма проявления активности субъекта (поисковой, познавательной исследовательской деятельности) [2].

Только тогда, когда усвоенная информация и приобретенные способы деятельности становятся не только предметом познания, но и инструментом для самостоятельного приобретения нового знания, можно говорить о развивающем характере познавательной деятельности

По определению Е.А. Шашенковой, исследовательская деятельность – это «специфическая человеческая деятельность, которая регулируется сознанием с учетом активности личности, направленная на удовлетворение познавательных, интеллектуальных потребностей, продуктом которой является получение новых знаний и навыков» [61].

А.И. Савенков [127] считает, что исследовательскую детальность следует рассматривать как особый вид интеллектуально – творческой деятельности, порождаемой в результате функционировании поисковой активности и строящейся на базе исследовательского поведения.

Но, если поисковая активность определяется лишь наличием самого факта поиска в условиях неопределенной ситуации, то исследовательское поведение описывает преимущественно внешний контекст функционировании субъекта в этой ситуации.

Исследовательская деятельность характеризует саму структуру этого функционирования. Она логически включает в себя мотивирующие факторы (поисковую активность) исследовательского поведения и механизм его осуществления [122].

При этом психологи традиционно понимают поисковую активность как активность, направленную на изменение ситуации, или на изменение самого субъекта, его отношение к ситуации при отсутствии определенного прогноза желательных результатов такой активности, но при постоянном учете промежуточных результатов в процессе самой деятельности.

Поиск появляется в условиях, которые не всегда удовлетворяют субъекту и не могут быть изменены в рамках стереотипного, жестко запрограммированного поведения [122].

Наряду с А.И. Савенковым, А.Н. Поддьяков связывает исследовательскую деятельность с исследовательским поведением, как универсальной характеристикой человеческой деятельности пронизывающей все другие ее виды [110].

Однозначного и строгого определения исследовательского поведения не существует.

Исследовательское поведение часто рассматривают: как поиск информации (А.Н. Поддьяков [110]); как поведение, направленное на изучение объекта, имеющее в своей основе психическую потребность в поисковой активности (А.И. Савенковым [127]).

Проблеме формирования исследовательских умений у студентов во время учебной деятельности посвящены исследования Ю.К. Бабанского, Т. А. Ильиной, И.Я. Лернера, П.Ю. Романова, и др. В последнее время увеличилось число публикаций, посвященных изучению общенаучных, в том числе и исследовательских умений в процессе самостоятельной работы обучаемых [9, 63,91,121].

В настоящее время формирование исследовательских умений студентов является обязательным составным элементом профессиональной подготовки будущих специалистов, так как основная задача высшей школы состоит в подготовке специалистов, способных самостоятельно ориентироваться в потоке меняющейся информации, способных сравнивать, анализировать, находить оптимальные варианты решений.

При таком подходе главным в обучении студентов становится организация формирования исследовательских умений, обучение которым повышает уровень научного мышления, служит гарантом продвижения в профессиональной, творческой деятельности будущего инженера, вырабатывает профессионально важные качества личности. [61]

В научно-педагогической литературе существуют разные трактовки термина исследовательских умений.

К.К. Платонов указывает, что умения должны характеризовать наиболее значимые для предмета виды деятельности, формирование которых обеспечивается необходимыми дидактическими условиями.

Л.М. Фридман считает, что умения характеризуют деятельность обучаемого в плане сознательного применения имеющихся у него знаний и навыков для выполнения сложных действии в различных ситуациях, т.е. для решения соответствующих задач[154].

Умения группируются по различным основаниям: предметно-содержательному; степени самостоятельности; виду деятельности; характеру психических процессов и т.д.

Специальные умения связаны со знаниями по определенному предмету. Обобщенные умения формируются при изучении всех учебных предметов.

Интеллектуальные умения чаще всего относятся к умениям овладевать мыслительными операциями, умениям решать задачи. При формировании исследовательских умений можно выделить два момента.

1. Поисковая деятельность (умение находить, отбирать, сохранять, анализировать нужную информацию, делать выводы).

2. Экспериментально-исследовательская деятельность (отбирать данные для эксперимента, преобразовывать условия задачи с помощью ИКТ, делать выводы, с учетом интерпретации полученных данных)

Исследование имеет следующие составные компоненты:

-постановка задачи, предварительный анализ имеющейся информации; условия и методы решения задач данного класса;

- формулировка исходных гипотез;

- теоретический анализ гипотез;

- планирование и организация эксперимента, анализ и обобщение полученных фактов;

- проверка исходных гипотез и окончательная формулировка новых фактов и законов при проведении исследований на производстве.

А.И. Савенков считает, что исследовательскую детальность следует рассматривать как особый вид интеллектуально – творческой деятельности, порождаемой в результате функционировании поисковой активности и строящейся на базе исследовательского поведения [127]. При таком подходе главным в обучении студентов становится организация формирования исследовательских умений, обучение которым повышает уровень научного мышления, служит гарантом продвижения в профессиональной, творческой деятельности будущего инженера, вырабатывает профессионально важные качества личности. В настоящее время формирование исследовательских умений студентов является обязательным составным элементом профессиональной подготовки будущих специалистов, так как основная задача высшей школы состоит в подготовке специалистов, способных самостоятельно ориентироваться в потоке меняющейся информации, способных сравнивать, анализировать, находить оптимальные варианты решений.

С.И.Брызгалова исследовательские умения трактует как способ решения деятельности. И.А. Зимняя, Е.А. Шашенкова определяют исследовательские умения как способность к самостоятельным наблюдениям (опытам), приобретаемая в ходе решения исследовательских задач. Ими выделены группы исследовательских умений в зависимости от логики научного исследования: научно-информационные; методологические; теоретические; эмпирические; письменно-речевые; коммуникативно-речевые [61].

На основании, выделенных исследовательских умений определены уровни и критерии оценки сформированности исследовательской деятельности студентов технического профиля. А.В. Петровский подчеркивает, что деятельность – это система, находящаяся в движении и развитии.[109] Формирование опыта *исследовательской* деятельности происходит в процессе ее осуществления, характеризуясь последовательным переходом от репродуктивного уровня овладения деятельностью к творческому уровню.

Таблица1. Уровни сформированности исследовательской деятельности

Критерий / Уровень	Научно-информационный	Методологический	Эмпирический	Коммуникативный
Репродуктивный	Студент имеет практические навыки работы со справочной литературой в области методологии научного исследования.	Формулирует исходные гипотезы, проводит теоретический анализ гипотез.	Наблюдение, сравнение, обобщение, моделирование.	Знакомы с требованиями, предъявляемыми к оформлению различных исследовательских работ, знают правила и приемы риторики, полемики, рефлексивного слушания.
Продуктивный	Владеет умениями гибкого восприятия научных текстов, участия в дискуссиях по методологии	Проводит проверку исходных гипотез и окончательно формулирует новые факты и законы при проведении исследований на производстве.	Проводят планирование и организация эксперимента, анализ и обобщение полученных фактов.	Может вести диалог, убеждать, внушать ;менять тактику коммуникаций, защищаться от манипуляций и психологических уловок; владеет инициативой в любом виде коммуникаций и ситуаций, грамотной и лаконичной речью.
Творческий	Освоение общих требований, предъявляемых к научным исследованиям, основам их планирования, организации постановки задачи, анализ имеющейся информации; условия и методы решения исследовательских задач.	Развитие прогностических умений; умения выдвигать гипотезы, на-ходить альтернативные решения проблемы.	Находит нужную информацию, отбирает и анализирует информацию, делает выводы	Высокий уровень рефлексивной культуры, позволяющей гибко и адекватно реагировать на изменение коммуникативной ситуации, высокий уровень профессиональной эрудиции.

Несмотря на то, что исследовательская деятельность выделена отдельным блоком, она не существует изолировано от других направлений инженерной деятельности, а органически с ними сливается. Важным моментом в процессе формирования исследовательской деятельности студентов является соответствие содержания обучения поставленной цели.

Выявление специфики содержания математического образования, способствующего достижению цели обучения – задача следующего параграфа.

1.2. Принципы и критерии отбора содержания математического образования студентов технических вузов, направленного на формирование исследовательской деятельности

В соответствии с Законом Российской Федерации «Об образовании» в период с 1994 по 1996 годы было разработано и введено в действие первое поколение государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования, федеральные компоненты которых включали в себя : обязательный минимум содержания основных образовательных программ; максимальный объем учебной нагрузки обучающихся; сроки реализации программы; требования к уровню подготовки выпускников. Стандарты первого поколения по сложившейся в российском образовании традиции жестко закрепляли требования к учебному процессу (а не к результату образования) и его «линейный» характер. Стандарты первого поколения были ориентированы в основном на решение достаточно локальных по своему характеру задач обеспечения нормативно-правового регулирования содержания и планируемых результатов высшего образования в условиях легализации в начале 90-х годов многообразия образовательных систем. Это определило основное назначение и приоритетные функции стандартов того времени – сохранение единого образовательного пространства страны, обеспечение содержания в пределах минимального достаточного уровня и требования к подготовке выпускников.

В стандарте второго поколения уже есть принципиально иные установки, ориентированные на европейские стандарты образования и требующие от вуза обеспечить получение студентами полноценного и качественного профессионального образования, профессиональной компетентности, умения приобретать новые знания, возможность выбора студентами индивидуальной программы образования. Во втором поколении образовательных стандартов четко определены структурные блоки дисциплин: федеральный компонент, национально-региональный (вузовский) компонент, дисциплины по выбору студента и факультативные дисциплины. Дисциплины и курсы по выбору должны были содержательно дополнять дисциплины, указанные в федеральном компоненте цикла.

На определенном этапе модернизации высшего профессионального образования данная конструкция сыграла положительную роль в плане совершенствования учебного процесса и обретения вузами дополнительных возможностей по формированию содержания образования.

Проектирование мобильного образования в мобильном мире, развитие способности к обучению, обновление знаний и смена профессий в разных вариативных формах непрерывного образования выступают как своего рода критерий при обсуждении ряда инноваций в рамках концепции модернизации образования. Сегодня все более значимым становится развивающий потенциал образовательных стандартов, обеспечивающий развитие системы образования в условиях изменяющихся сегодня запросов личности и семьи, ожиданий общества и требований государства в сфере образования. В настоящее время стандарты должны выступить: инструментом организации и координации системы образования, служить ориентиром ее развития и совершенствования, критерием оценки ее адекватности новым целям и ценностям образования (развитие личности как цель и смысл образования).

Несмотря на то, что государственные образовательные стандарты как первого, так и второго поколения значительно расширили академическую свободу вузов в формировании образовательных программ, они в полной мере не изменили культуру проектирования содержания высшего образования поскольку. Во-первых, сохранили ориентацию на информационно-знаниевую модель высшего профессионального образования, в которой основной акцент делается на формировании перечня дисциплин, их объемов и содержания, а не на требованиях к уровню освоения учебного материала. Во-вторых, не преодолели отрыва от развивающейся экономики страны и отдельных регионов при проектировании вузовского компонента, обеспечивающего подготовку специалиста под конкретного потребителя. Кроме того, к моменту перехода к стандартам третьего поколения недостаточно «встраивались» в европейскую образовательную практику и не предполагали студенческой мобильности в образовательном процессе, когда обучающийся мог свободно выбирать себе индивидуальную программу обучения и учиться в других профильных вузах и даже за рубежом без потери времени и повторной сдачи дисциплин.

Структура нового поколения стандартов и заключенные в нем механизмы обновления призваны обеспечить целесообразную меру динамичности. Некоторыми отличительными особенностями новых стандартов являются: выраженный компетентностный характер; разработка пакета стандартов по направлениям как совокупности образовательных программ бакалавра, специалиста и магистра, объединяемых на базе общности их фундаментальной части; обоснование требований к результатам освоения основных образовательных программ (результатов образования) в виде компетенций; отсутствие компонентной структуры (федерального, национально-регионального, вузовского) с одновременным значительным расширением академических свобод высших учебных заведений в части разработки основных образовательных программ.

Каждый учебный цикл дисциплин имеет базовую (обязательную) часть и вариативную (профильную), устанавливаемую вузом. Вариативная (профильная) часть дает возможность расширения или углубления знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых дисциплин, позволяет студенту продолжить образование на следующем уровне ВПО для получения квалификации (степени) магистра в соответствии с полученным профилем, получить углубленные знания и навыки для успешной профессиональной деятельности.

Для этого новый стандарт ориентирует на создание образовательных программ, предусматривающих разнообразную специализацию, учет способностей и интересов студентов, наконец, включенное обучение, то есть возможность осваивать данные программы по частям, в том числе меняя учебные заведения. Отсюда модульный принцип построения программ. Они будут состоять из блоков-модулей, способных выстраиваться в различном порядке, образовывая индивидуальные траектории обучения. Каждый модуль представляет собой совокупность учебных дисциплин, практик, форм контроля, методическое обеспечение и т.п., ответственных за формирование определенной компетенции (компетенций). Таким образом, вуз получает достаточную свободу для определения объемов и содержания подготовки выпускников. В отличие от предыдущих стандартов, даже для базовой составляющей ФГОС ВПО третьего поколения, объем и содержание отдельных дисциплин никак не регламентированы, что требует от вуза вдумчивого отношения к процедуре проектирования требуемого содержания для подготовки специалиста требуемого качества. Влияя на состав содержания учебной дисциплины, этот фактор в будущей профессиональной деятельности - определяет функции каждого учебного предмета, от чего непосредственно зависит логика конструирования содержания того или иного учебного предмета [48, 49,50,156].

При формировании содержания математического образования, роль внешней среды играет будущая профессиональная деятельность. В составе содержания должны быть отражены новые технологии, использующиеся в профессиональной деятельности. Проецируя общую ценностно-целевую иерархию образования на область математического образования будущих инженеров, определим приоритеты в обучении математике инженеров.

Л.Д. Кудрявцев, посвятивший многие годы преподаванию математики студентам инженерных специальностей, в работе "Мысли о современной математике и ее изучении» говорит о том, что целью при обучении математике является приобретение учащимся определенного круга знаний, умения использовать изученные в математике методы, развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

Л.Д. Кудрявцев отмечает, что «в результате приобретенных в процессе обучения математических знаний и интуиции учащихся появляется то, что обычно называется математической культурой»[80].

В другой своей работе «Современная математика и ее преподавание» [81] ученый также считает целью математического образования инженеров воспитание математической культуры мышления.

Математик Б.В. Гнеденко, отмечает: "В связи с увеличением роли математики в жизни общества возникает необходимость на любых ступенях математического образования стремиться не только к изложению методологических моментов науки, в том числе, связей математики с познанием окружающего нас мира и его закономерностей, познания и усвоения основ математики». И далее «нам нужно воспитать наших учеников в привычке к самостоятельным поискам нового, в вере в свои силы и в способности длительное время сосредоточивать мысли на волнующей проблеме, на разыскивании путей ее решения» [45].

Еще в начале XX века французский математик А. Пуанкаре указывал на необходимость развития культуры мышления. Благодаря этому мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром, и если чистая математика может обойтись без него, то она всегда необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет математические символы от реального мира[115].

Анализируя работы и других математиков нашего времени А.Н. Колмогорова, А.Г. Постникова, А.Реньи, а также психологов В.А. Крутецкого, Я.И.Груденова, Л.М.Фридмана и др., можно убедиться в единстве их мнения в вопросе о цели преподавания математики. Главной целью математического образования является воспитание математической культуры мышления, которая представляет собой некий сплав логического мышления и математической интуиции. Однако эта цель не является единственной. Ученые также указывает на необходимость формирования нравственных ценностей и ориентиров учащихся в процессе обучения математике. Так как в этих целях отражены общие задачи профессионального образования с учетом специфики учебного предмета, то система математического образования инженеров на уровне теоретического представления носит в настоящее время абстрактный и инвариантный характер. Это в одинаковой мере необходимо и неизбежно, являясь ответом на основной вопрос математического образования «для чего инженеру нужна математика?», указанная цель представляет собой некоторую неизменную совокупность качеств личности**,** приобретаемую учащимся в процессе изучения математики.

Основным источником содержания математического образования, очевидно, является непосредственно математическая наука на современном уровне ее развития. В математике, как и в любой другой науке, выделяют три категории знания: собственно предметное знание; знание о математических методах познания; историко-научное знание.

В зависимости от требуемого уровня изложения учебного предмета, наиболее полно раскрывается та или иная область знаний этого предмета. Поскольку в последнее время наблюдается тенденция математизации науки вообще, то ее формализация и функция математики как учебного предмета приобретает противоречивый характер.

С одной стороны, в этом учебном предмете ведущим компонентом являются предметные научные знания. Поэтому здесь должны быть выражены все структурные элементы науки - от основных понятий до систематических теорий. С другой стороны, математика представляет собой целую совокупность отдельных наук (аналитическая геометрия, математический анализ, теория вероятностей, математическое моделирование и др.).

Следующим источником формирования содержания математического образования будущего инженера, являются виды деятельности, которые отражены в элементах состава содержания математического образования:
в знаниях, умениях и навыках математической деятельности; в опыте творческой деятельности; в опыте исследовательской математической деятельности.

К источникам формирования содержания математического образования будущего инженера также относятся знания о закономерностях усвоения, методах и средствах обучения, организационных формах обучения, с учетом профессиональной направленности вуза.

Эти элементы процесса обучения как источники формирования содержания включают в себя инвариантную и вариативную составляющие. Влияние первой сказывается на уровне учебного предмета и учебного материала. Так, например, в содержание математического образования включается формирования навыков пользования средствами обучения (научной и учебной литературой, учебными компьютерными программами**,** различными математическими таблицами и др.), умение воспринимать информацию, подаваемую с их помощью. В свою очередь, сами средства обучения влияют на содержание материала, полученного при изучении математики, которое может быть представлено с их помощью.

С другой стороны, если набор средств обучения ограничен, то изменение содержания, связанное с этим, индивидуально для каждого вуза и каждого учебного занятия.

Основное влияние на формирование содержания образования инженера, оказывает его будущая профессиональная деятельность, которая должна быть учтена в процессе воспитания специалиста. Понятие «образование» связано не только с воспитанием, обучением и развитием учащихся. Образование – это широкое социокультурное явление, связанное с экономикой, культурой, политикой, научно-техническим прогрессом, производственными инновациями и т.д.

В связи с изменениями в обществе, происходящими под влиянием изменения экономики акцент в системе целей образования переходит от совокупности знаний, умений и навыков на развитие личности, на формирование потребности в самообразовании и самоопределении в учебных и жизненных ситуациях. В основе лежит положение, что любая личность неповторима и потому имеет право на дружественную ей систему образования, учитывающую способности и возможности личности и обеспечивающую постоянную профориентационную поддержку. Развивающийся мир нельзя адекватно отразить застывшей системой образования. Образование должно стать дискретно непрерывным, имея ступенчатую структуру.

Анализ работ И.В. Алехиной, Б.С. Гершунского, В.Л. Куровского, О. Полешук, А.Д. Полянина, С.Д. Смирнова, и др., посвященных проблеме развития высшего образования, позволяет выделить основные принципы построения новой системы профессионального образования:

1. Принцип непрерывности. Новая модель образования позволяет учащемуся продолжить образование на всех жизненных этапах с учетом возможностей, потребностей личности, а также в связи с ситуацией на рынке труда. Кроме того, непрерывность образования решает проблему переподготовки кадров, повышения квалификации, поскольку позволяет в довольно короткий срок получить необходимую профессиональную подготовку, тем самым, приобретая особое значение в условиях рыночной экономики [3,41,42,83, 144].

2.Принцип гуманизации. Этот принцип реализует идею общей не узкоспециализированной ограниченности. Согласно этому принципу в структуре содержания образования выделяется доминирующее влияние образовательной функции над профессиональной подготовкой, с учетом того, что «всесторонне развитая личность - это человек, способный применить творческие способности в своей профессиональной деятельности» [2, 144].

3. Принцип фундаментальности. Под фундаментальностью понимается оптимальное сочетание философской, мировоззренческой и методологической сторон изучения предмета, которые должны излагаться на научной основе. Реализация этого принципа дает возможность адаптации специалиста в широкой сфере деятельности в условиях быстрых инновационных процессов, поскольку обеспечивает овладение разнообразными видами деятельности, формируя новый инновационный стиль мышления.

4. Принцип гибкости и открытости, который является, самой характерной чертой дискретно ступенчатой системы высшего образования. После успешного завершения каждого уровня образования студент имеет право сделать выбор дальнейшего обучения или осуществления профессиональной деятельности. Тем самым он конструирует свою индивидуальную образовательную траекторию, исходя из собственных способностей и материальных возможностей. Кроме того, реализуется потребность общества в специалистах различной квалификации и уровня образованности.

5. Принцип самостоятельности. Современный уровень развития общества требует от своих членов максимально обоснованной самостоятельности в процессе решения профессиональных задач. Жестко регламентированный процесс обучения в традиционной системе высшего образования не формировал навыков самостоятельности. Студенту не приходилось задумываться над построением собственного образовательного маршрута, над совокупностью тех знаний и умений, которые он хотел бы получить и которые бы наилучшим образом соответствовали бы его наклонностям и потребностям. Все эти вопросы решала система за него.

В новых же условиях, начиная с первых курсов, студент самостоятельно выбирает необходимую ему систему образовательных услуг, предоставляемых вузом. Кроме того доля самостоятельной заботы студента в профессионально - образовательных программах теперь достигает 50% и прослеживается тенденция дальнейшего ее роста.

Смена цели образования естественно ведет к изменению его содержания. Теперь овладение содержанием предмета должно выливаться в освоение метода предметного мышления как частного вида конкретного мышления. Содержание должно включать, в себя не только систему знаний, умений и навыков (систему ЗУН), но и сам поиск, процесс формирования знаний, алгоритмов, форму и т.д., который реализуется в содержании.

В связи с этим становится актуальной проблема исследования формирования содержания профессионального образования и в частности содержания математического образования будущих инженеров, ориентированного на формирование исследовательской деятельности студентов.

Рассматривая содержание образования как систему, выделяют три уровня его формирования [144]:

1. Уровень общего теоретического представления, где определяются в обобщенном виде состав (элементы), структура (связи между элементами) и функции содержания образования.

2. Уровень изложения учебного предмета. Здесь на этом уровне фиксируются специфические функции составных частей изучаемой дисциплины, которые определяют состав и структуру её содержания.

3. Уровень учебного материала. Здесь определяются конкретные элементы состава содержания, входящие в курс обучения каждому определенному учебному предмету.

Содержание математического образования будущего инженера, является подсистемой более сложной системы содержания профессионального образования. Оно формируется согласно логике исследования и построения содержания образования, учитывая при этом свои специфические функции. Так, при планировании содержания базового математического образования на уровне учебного предмета «вывшая математика», выделяют три уровня формирования, учитывая его специфику:

1. Уровень общего теоретического представления о задачах и функциях учебного предмета. Здесь определяется иерархическая система целей математического образования, на основе чего выделяется необходимый набор учебных разделов (состав) и их внутрипредметные и межпредметные связи, то есть определяется структура математического знания для будущих инженеров.

Так, в настоящее время элементами состава содержания учебного предмета «Высшая математика» для инженеров технологов являются следующие разделы: линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика и др.

2. Уровень собственно учебного предмета, на котором определяются специфические функции каждого учебного раздела. Приводится структурный анализ содержания.

3. Уровень учебного материала, где на основе структурного анализа отбираются конкретные учебные элементы, подлежащие усвоению учащимися.

Таким образом, опираясь на общую теорию формирования содержания профессионального образования, выделим основные требования к отбору содержания математического образования будущего инженера:

- уточнение целей содержания математического образования в новых социокультурных условиях;
- на основе структуры и функционального анализа определение совокупности учебных элементов содержании математического образования.

Исходной задачей любого системного исследования является определение целей функционирования системы [125]. Не обозначив целей математического образования будущих инженеров, невозможно искать средства достижения этих целей.

Математическое образование входит в систему общего профессионального образования. Это означает, что цели первого подчиняются целям второго.

Высшими приоритетами образования являются:

- развитие способностей обучающихся, в том числе и способностей к самопознанию и адекватной оценке своих возможностей и жизненных предпочтений;

- формирование общекультурных и профессиональных компетенций необходимых для полноценной самореализации в трудовой и общественной деятельности;

- формирование нравственных качеств личности, определяющих критериальную основу его поступков и поведения. [41, 42].

Проецируя общую ценностно-целевую иерархию образования на область математического образования будущих инженеров, выделим приоритеты в обучении математике будущих инженеров. Определим принципы и критерии отбора содержания математической подготовки студентов технических вузов, направленной на формирование исследовательской деятельности обучающегося. Для этого необходимо **определить критерий,** на основе которого можно судить о достижении поставленных целей. Таким критерием может служить способность к математическому моделированию. Применение метода моделирования, в формировании профессиональной компетентности, будущего инженера выполняет следующие функции:

- способствует развитию мировоззрения студентов;

- знакомит с методологией научного поиска и методами познания;

- развивает мотивацию и интерес к овладению естественно - научным и профориентированным знаниям;

- развивает познавательную деятельность и пополняет профессиональные знания;

- воспитывает управленческую деятельность;

- развиваются творческие способности, инженерное мышление;

- развивает эвристическую мыслительную деятельность;

- способствует самообразованию, самосовершенствованию;

- развивает прогностический подход; умение выдвигать гипотезы, находить альтернативное решение проблемы.

Все эти способности и качества, приобретаемые при использовании метода функционально-математического моделирования необходимы при решении профессиональных задач и проблем в любой инженерной деятельности.

Это позволяет, с одной стороны рассматривать функционально-математическое моделирование как интегральную компоненту инженерного мышления, а с другой - открывает перспективу процесса его формирования в системе подготовки профессиональной компетентности будущего инженера.

С учетом выше названных требований определим роль, место и задачи математического моделирования в образовательном процессе инженерного вуза. Первоначально обратимся к расшифровке сущности самих понятий модель и математическое моделирование.

Понятие «модель» имеет множество определений, причем в разных ситуациях в него вкладывается различный смысл.

По мнению А.Б. Горстко: «Модель - это такой материальный и мысленно предоставляемый объект, который в процесс познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты» [47].

В технических науках под моделью понимают искусственную систему, отображающую основные свойства изучаемого объекта - оригинала. Она находится в определенном соответствии с изучаемым объектом и может заменить его при исследовании и позволяет получить информацию об изучаемом объекте» [132], а использование математических моделей обеспечивает переход к оригиналу, фиксации и исследовании свойств и отношений с помощью математических методов .

В рамках исследования операций математическая модель представляет собой систему математических уравнений, логических правил, пользуясь которыми можно для каждого выбранного варианта условий при заданных параметрах вычислить значение того или иного параметра [163].

При исследовании оптимизационных процессов один и тот же объект в зависимости от целей моделирования может иметь различные модели [163].

Принимая во внимание широкий спектр существующих определений, становится очевидном, что нельзя дать общего определения понятия "модель" без использования термина «моделирование».

К.А. Рыбников, исследуя методологию математики, приводит гносеологические основы процесса моделирования. Моделирование – есть приближенное комбинированное применение, отражение, замена реальных объекта или процессов достаточно иного на те, которые полнее воспроизводят свойства объекта, разных моделей - это и есть диалектический путь познания действительности [125].

Ю.В. Чуев в качестве философской основы математического моделирования подчеркивает явление изоморфизма, «которое означает сходство формы при качественном различии явлений. Благодаря изоморфизму появляется возможность моделировать одну систему с помощью другой. Изоморфизм указывает на единство, связь, взаимодействие и взаимозаменяемость в определенных пределах различных явлений окружающего мира, на сходстве их формы и отдельных закономерностей [160].

По мнению большинства авторов, существенным достоинством математического моделирования является широта возможностей применения, что позволяет изучать те стороны объекта, которое скрыты и недоступны для непосредственного наблюдения.

На основании теоретического анализа понятий «модель» и «моделирование» можно сделать заключение о том, что моделирование способствует приведению частных знаний в систему и обеспечивает выполнение следующих функций:

- выступает в роли заменителя объекта изучения;
- связывает аппарат выражения модели с решением поставленной задачи;
- позволяет получать сведения об изучаемом объекте;
- предоставляет возможность получать обобщенную модель объекта по результатам изучения отдельных сторон оригинала;
- позволяет судить о реальных объектах, на основании исследований проводимых на моделях.

При формировании содержания математического образования мы опирались на общедидактические принципы обучения: научности, доступности, наглядности, преемственности, последовательности и системности обучения. Вместе с тем, мы выделяем концептуальные принципы отбора содержания математического образования, направленного на формирование исследовательской деятельности студентов:

- единства учебного материала в содержании учебных элементов модулей;
- полноты и оптимальности содержательной линии дисциплины;
- принцип фундирования базовых учебных элементов математического образования будущих инженеров;
- интеграции фундаментальных и прикладных математических знаний.

1.3. Наглядное моделирование в обучении математике как средство формирования исследовательской деятельности студентов

Методологической основой интеграции знаний в процессе обучения математике студентов технических вузов при формировании исследовательской деятельности выступает наглядное моделирование. Наглядность первоначально в дидактике рассматривалась как принцип обучения, согласно которому обучение строится на конкретных образах непосредственно воспроизводимых обучающимися. В связи с созданием теории обучения разрабатывались средства наглядности (объект или явление, образ, модель, схема). В результате систематизации методов обучения в дидактике сформировался объяснительно-иллюстративный метод обучения, где наглядные и словесные приёмы обучения применялись одновременно. С развитием дидактики и её связей с возрастной и педагогической психологией обучение от ассоциативных теорий осознанного запоминания перешло к развивающим теориям обучения, основанным на деятельностном подходе. В связи с этим необходимо переосмысление и обновление методической системы обучения математике и её компонентов: целей, содержания, способов, форм и средств интеграции, а также формирование опыта личности студента в математическом исследовании. Для глубокого и осознанного усвоения математических знаний наглядно-модельный метод обучения выступает связующим звеном в ряду других методов обучения: проблемным, проектным, исследовательским, абстрактно-дедуктивным и индуктивным методами познания. В обучении математике наглядное моделирование занимает особое место. Многие математические теории обладают высокой степенью абстракции, что обуславливает представление информации в знаково - символьной форме. Наглядное моделирование как приём обучения присутствует во всех методах объяснения, как компонент понимания и образного представления математических знаний. Это и объясняет его выбор интегрирующим фактором в обучении математике, направленного на формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов в процессе обучения математике. Подтверждением актуальности и целесообразности применения метода наглядного моделирования является создание математиками XVII-XVIII веков ε-δ языка для обоснования предельных процессов. «Такое наглядное моделирование создавало возможность, в том числе, встать на новый, социально-значимый уровень понимания и объяснения сущности основ дифференциального и интегрального исчисления»[61, с.209] Построение процесса обучения будущих инженеров, направленного на формирование исследовательской деятельности студентов, осуществлялось нами на основе разработанной Е.И. Смирновым и его учениками концепции наглядно-модельного обучения. Предпочтение отдается «наглядной» модели как опоре на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. [35]

Модель должна отражать суть понятия, формы и методы исследования. Наглядно-модельное обучение включает следующие компоненты:

-выделение базовых учебных элементов (понятия, теоремы, задачи);

-создание модели идеального объекта (схемы, графики, образец решения задачи);

-взаимный переход знаковых систем к знаково-символическим подсистемам;

-вербальный переход от конкретно-деятельностных аспектов к обобщенным знаковым формам.

В исследованиях Н.Г. Салминой [129] выделены виды наглядного моделированиям, на основе способа ведущей деятельности: моделирование, кодирование, схематизация, замещение.

Содержательной основой интеграции фундаментальных и прикладных математических знаний студентов технического профиля является знаково-символьная наглядность. Видом знакового моделирования выделено математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики и использованием тех или иных математических методов. Рассмотрим подробнее процесс математического моделирования. Объектами моделирования могут оказаться как конкретные, реально существующие, так и абстрактные объекты, системы, процессы и т.д. В работе «Введение в методологию математики» [125] К.А. Рыбников выделяет следующие основные черты процесса моделирования:

- в каждом отдельном случае должна быть выработана и принята совокупность свойств, определяющая модель по возможности точно, не допуская многих толкований.
- модель должна быть такой, чтобы она могла замещать в исследованиях объекты, должна иметь с ними сходные черты (выделенные количественные отношения, геометрические формы, изоморфные структуры, аналогии т.д.). Требование общности, сходности позволяет не только правильно строить модель, но и переносить знания, полученные при анализе модели, на моделируемый объект.

Моделирование реальных явлений, систем сложный творческий процесс. Рыбников К.А. предлагает выделить лишь самый общий алгоритм, отражающий его:

1. постановка и по возможности, четкая формулировка задачи;
2. поиск основных переменных величин, определяющих процесс;
3. определение соотношений между этими переменными и параметрами, от которых зависит состояние процесса;
4. выработка и формулирование гипотезы (или гипотез) относительно характера изучаемых условий;
5. построение модели путем технической имитации, математического описания или создания другой системы, свойства которой, хотя бы для отдельных состояний, совпадают с первоначально установленными;
6. проведение контрольных экспериментов;
7. проверка гипотезы, принятой при построении моделей, и ее оценка в зависимости от исхода контрольных экспериментов;
8. принятие, отклонение или видоизменение гипотезы с повторными проверками и выводами.

Результатом подобной направленной деятельности является формирование системы, отражающей реально протекающий процесс.

Задачу математического описания реальных ситуаций с помощью символов, снабженных определенной смысловой нагрузкой, чаше всего и называют построением математической модели [10, 17]. При этом описываются соотношения между переменными величинами системы, чаще всего для того случая, когда они находится в равновесном состоянии с учетом прошлого развития. Выбор переменных и отношение логической структуры требует большого искусства. Сами переменные могут быть либо строго определенными, либо случайными. Вид математического аппарата, используемого при моделировании, и вид математических моделей зависит от того, какие соотношения требуется выделять для изучения моделируемых объектов.

Методы математического моделирования в настоящее время широко используются в различных областях науки и техники, математические модели применяются для изучения физически, химических, биологических процессов [10, 17, 150].

Математическое моделирование естественнонаучных объектов является классическим примером использования математического аппарата для исследования проблем, при изучении гуманитарных наук - применение математических методов находится в стадии становления [43].

Очевидно, что для будущих инженеров особый интерес представляют примеры технических математических моделей.

В работе «Современная математика ее преподавание» Л.Д. Кудрявцев [81] формулирует следующие основные задачи, стоящие перед математическим образованием инженера. Выпускник инженерного вуза должен уметь:

- строить математические модели;
- ставить математические задачи;
- выбирать подходящий математический метод и алгоритм для решения задач;
- применять качественные методы исследования.

При этом ученый отмечает, что «нельзя научить приложениям математики не научив самой математике». И выдвигает требование необходимости усиления прикладной направленности курса математики при одновременном повышении уровня фундаментальной математической подготовки. Объединение обоих направлений в решении дидактических задач курса привело к идее использования математического моделирования как средства развития исследовательской деятельности студентов в процессе обучения математике.

Закономерности целостного восприятия и оперирования математическими объектами, позволили выделить содержание по освоению методологических знаний и исследовательских умений. Оперирование математическими объектами представляет собой преимущественно знаково - символическую деятельность по преобразованию системы знаково-символических средств. Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т.д.

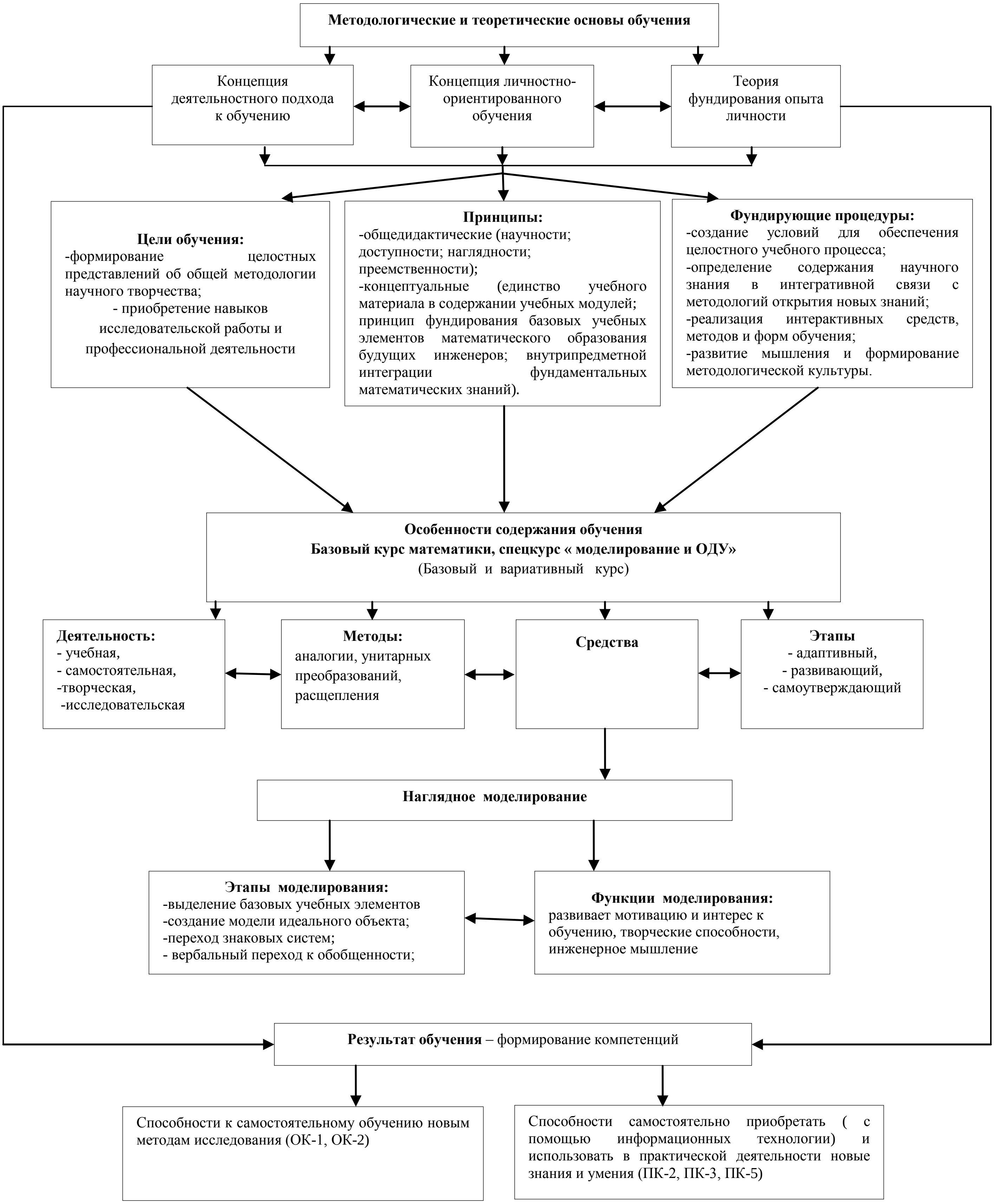
Важнейшим видом знакового моделирования выделено математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики и использованием тех или иных математических методов. Согласно мнению большинства исследователей под математическим моделированием будем понимать отображение в математической форме (в виде уравнений, неравенств, систем, графиков) основных закономерностей изучаемого процесса или объекта.

В результате теоретического анализа психолого-педагогических исследований в области математического образования построена модель обучения математике студентов технического профиля, направленного на формирование исследовательской деятельности обучающегося (схема 1). Формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов на основе наглядного моделирования позволяет осуществлять интеграцию математических и методологических знаний, средствами математического моделирования. Освоение математической деятельности студентов основано на наглядном представлении объектов, процессов и явлений в обучении математике, применении специальных методов изложения знаний (метода аналогии, унитарных преобразований и расщепления) в обучении математике студентов технических вузов. Методика обучения математике студентов технических вузов, направленная на формирование и развитие исследовательской деятельности обучающихся, реализуется на основе интеграции математических и методологических знаний, средствами наглядного моделирования в ходе решения профессионально ориентированных задач исследовательского характера. При изложении различных разделов теории дифференциальных уравнений (особенно на инженерных факультетах) всегда возникает проблема выбора наиболее оптимальной и эффективной методики изложения данного материала. За последние 100 лет (а может и более) не было предложено ни одного достаточно конструктивного аналитического метода исследования и метода изложения данного материала.

Все большее внимание уделяется различным численным алгоритмам исследования указанных задач. Лишь через 50 лет после реального введения в научную практику векторно - матричного способа записи системы дифференциальных уравнений в 90-е годы 20-го века в работах Коняева Ю. А. был разработан (не претендуя на универсальность) ряд новых конструктивных аналитических методов исследования в качественной теории дифференциальных уравнений, включая вопросы устойчивости, а также в теории регулярных возмущений.

В представленной работе были исследованы и реализованы в качестве методов анализа и преподавания (совместно с методом обоснованной аналогии) два новых алгоритма (метод унитарных преобразований и метод расщепления). Это позволило на их базе создать новые эффективные методики изложения соответствующих разделов математики, что нашло подтверждение при их преподавании на инженерном факультете.

Схема 1. Модель обучения математике студентов технических вузов, направленного на формирование исследовательской деятельности



Сущность метода унитарных преобразований при анализе квазилинейных систем вида $\dot{x} = A(x,t)x$ с нормальной матрицей $A(x,t)$ состоит в исследовании устойчивости их решения с учётом структуры её спектра и свойств нормальных матриц (приводимости нормальных матриц к диагональному виду с помощью унитарных преобразований), что для произвольных систем в общем случае не имеет места.

Это позволило доказать ряд нетривиальных теорем (и изучить соответствующие примеры), что можно считать обобщением классической теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению на указанный класс задач. Сущность метода расщепления состоит в новом эффективном алгоритме нахождения спектра $\lambda_j(\varepsilon)$ и собственных векторов $s_j(\varepsilon)$ возмущенной матрицы $A(\varepsilon)$, т.е. решения спектральной задачи:

$A(\varepsilon)s_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon)s_j(\varepsilon)$ после её записи в матричной форме $A(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)$, где (при наличии простого спектра) $\Lambda(\varepsilon) = diag\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$ и при дальнейшем использовании аппарата метода расщепления, что выгодно отличается от классических методов.

Проведем как пример исследование на устойчивость консервативной механической системы (без трения) с одной степенью свободы.

1. Выделение базовых учебных элементов:
   -дифференциальные уравнения второго порядка

Механическая система описывается модельным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx^m = 0; \quad (a, b > 0;\ m = 2k+1)$ (2.2)

с одной степенью свободы под действием потенциальной нелинейной силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости.

2. Создание модели идеального объекта: используем теорему Барбашина - Красовского для доказательства устойчивости решения дифференциального уравнения (2.2)
3. Взаимный переход знаковых систем: чтобы воспользоваться методом внутренней аналогии и алгебраическим методом унитарных преобразований, преобразуем уравнение (2.2) к системе ОДУ с нелинейной матрицей:

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay - bx^m; \\ \dot{x} \ = \qquad\qquad y; \end{cases} (m = 2k + 1);$$

или в матричной форме:

$$\dot{y} = A(y)y;$$

$$\left(A(y) = \begin{pmatrix} (-a) & (-bx^{2k}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right); \qquad \left(y = (\dot{x}, x)\right)^T$$

и преобразуем полученную систему (с учётом известных точек покоя) к системе нормальном матрицей.

4. Вербальный переход от конкретно-деятельностных аспектов к обобщенным знаковым формам:

После невырожденной замены

$$y = S_0 z\,; \quad \left(S_0^{-1}A(0)S_0 = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

мы имеем возможность перейти к другой квазилинейной эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{z} = B(z)z; \quad \left(B(z) = \begin{pmatrix} -a + q(x) & q(x) \\ -q(x) & -q(x) \end{pmatrix}; q(x) = {bx^{2k}}/{a} > 0\right)$$

более удобной для дальнейшего анализа.

Исследование консервативной механической системы $\ddot{x} = f(x)$;

$$(f(0) = 0;\ f(x) \in C^1(\Omega);\ \Omega\colon \{|x| < R\};\ f(x) = f^{'}(\xi)x),$$

приводит к эквивалентной системе

$\dot{y} = A(y)y; \qquad A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f^{'}(\xi) & 0 \end{pmatrix}; \qquad y = (x, \dot{x})^T.$

$$\dot{y} = A(y)y;\ A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(\xi) & 0 \end{pmatrix}; \quad (-f'(\xi) < 0).$$

В силу теоремы 2.5 и существования диагональной матрицы $\overline{Q}(x) = \begin{pmatrix} -f'(\xi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицы $B(y) = \overline{Q}(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & -f'(\xi) \\ f'(\xi) & 0 \end{pmatrix}$, которая, являясь нормальной, имеет чисто мнимый спектр $\lambda_{Bj} = \pm i f'(\xi)$, поэтому точка покоя $x = 0$ исходного уравнения будет устойчивой.

Обучение станет осмысленной, целенаправленной деятельностью, если студент ясно представляет значение и необходимость вводимых понятий и фактов. Для этого необходимо, чтобы каждое понятие рассматривалось в контексте некоторой математической модели реального процесса. Поэтому целесообразно начинать изучение математики с постановки целей и задач математического образования, которые представляют собой раскрытие сущности наглядного моделирования, его внутренней природы. Далее все вводимые понятия необходимо иллюстрировать построением той или иной математической модели, отражающей как суть реального процесса - с одной стороны, так и его математическую абстракцию – с другой.

Следует также отметить возрастающую роль различных математических методов (появление которых связано не только с внедрением компьютерной техники) в преподавании почти всех гуманитарных, медицинских, философских, и ряда других дисциплин, а также с философским осмыслением роли и необходимости математических методов в различных сферах человеческой деятельности. В работе показано применимость и эффективность метода аналогии, как методологического и математического метода изложения и изучения некоторых классов нелинейных конкретных физических и биологических модельных задач при соответствующем обосновании. Этот достаточно конструктивный и эффективной метод, удобный для его изложения и усвоения слушателями от бакалавра, магистра и до аспиранта, пока мало используется преподавателями математики в высшей школе. Его совместное применение в сочетании с некоторыми математическими методами, в частности, с достаточно новым математическим методом, методом унитарных преобразований (не требующих громоздких преобразований и вычислений) позволяет исследовать вопросы устойчивости большого класса модельных нелинейных систем ОДУ (не претендуя на универсальность), описывающих некоторые физические, биологические процессы, при их квазилинейной матричной записи. Методика обучения математике в современных условиях обусловлена новой образовательной парадигмой, основанной на компетентностном подходе к обучению и направленной на личное самосовершенствование студентов. Анализ изученного опыта в определении подходов к пониманию компетентности, как личностного образовательного результата и специфики целевых установок математической и специальной подготовки студентов технических вузов, позволил нам выделить понятие *математической компетентности* студентов как синтеза усвоенных математических знаний и методов математической деятельности, опыта их использования в решении профессионально направленных математических задач. Особую важность приобретают также решение задач, лежащих вне предмета математики, на основе ценностного отношения к полученным знаниям и опыту, и к себе как носителю этих знаний и опыта. [5]

В структуре математической компетентности [5] рассматриваем три основных компонента: когнитивный, праксеологический и аксиологический. Учитывая специфику структуры предмета «математика» и целевых установок математической и специальной подготовки студентов технических вузов, дадим содержательное описание каждого из трех выделенных компонентов математической компетентности (таблица 2). Исходя из полноты овладения студентом компонентами математической компетентности и степени самостоятельности их проявления в соответствующей деятельности выделено три уровня сформированности математической компетентности студентов технических вузов.

Первый уровень: студент знает основные понятия и методы курса математики, на их основе решает задачи курса, при наличии ориентировочной основы решает отдельные профессионально направленные математические задачи, понимает важность математических знаний, но не имеет внутренней установки на их пополнение.

Второй уровень – студент владеет основными понятиями и методами курса математики, на их основе самостоятельно решает задачи курса и отдельные профессионально направленные математические задачи, осознает необходимость приобретения недостающих математических знаний, но делает это по рекомендации преподавателя.

Таблица 2

Структура математической компетентности студентов		
Когнитивный компонент: Студент знает	Праксеологический компонент: студент умеет	Аксиологический компонент: студент понимает (осознает)
все основные понятия курса математики и их геометрические, механические, физические интерпретации; все методы решения математических задач курса (методы интегрального и дифференциального исчислений, линейной и векторной алгебры, вариационного исчисления, рядов и дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики) метод математического моделирования; прикладные задачи курса математики и способы их решения; понятие профессионально направленной математической	самостоятельно приобретать математические знания из различных источников; воспроизводить устно и письменно все основные понятия курса математики, устанавливать логические связи между ними (анализировать, сопоставлять, делать выводы); решать все задачи курса математики, используя его соответствующие методы; использовать метод математического моделирования для решения прикладных и профессионально направленных задач	необходимость приобретения математических знаний как основы успешной специальной подготовки; важность знания и умения использовать основные методы курса математики в решении задач этого курса и за его пределами для учебной успешности и будущего карьерного роста; важность опыта в использовании метода математического моделирования в решении профессионально направленных математических задач как основы грамотного современного решения инженерных задач будущей профессии; актуальность математического

задачи и способы их решения		самообразования для принятия креативных инженерных решений в будущей профессии

Третий уровень - студент владеет основными понятиями математики и методами научного познания ; на их основе самостоятельно решает задачи курса и профессионально направленные математические задачи; осознает необходимость приобретения недостающих математических знаний и приобретает их; проявляет позитивное отношение к математическим знаниям и оценивает владение ими как основу своей успешной специальной подготовки и исследовательской деятельности в будущей профессии.

Выводы по главе I

1. В философии, психологии, педагогике и науковедении «исследовательская» деятельность имеет многоплановое смысловое наполнение. Однозначного и строго определения исследовательской деятельности не существует. Исследовательская деятельность обучающихся рассматривается в педагогике как деятельность, направленная на формирования и создание тех сторон характера, которые важны для формирования личности, как общественного субъекта на основе самостоятельного приобретения субъективно новых знаний, умений и навыков.

Анализ психолого-педагогической литературы показал, что под опытом исследовательской деятельности понимаются качественные характеристики личности, формирующиеся в результате накопления и осмысления новых знаний, умений, методов, полученных в процессе осуществления исследовательской деятельности и проявляющиеся в способах получения нового, объективного и системного знания о действительности. Продуктом исследовательской деятельности являются не только, а может быть, и не столько знания, которые приобретаются сколько способы познавательной деятельности, которые воздействуют на интеллектуальное развитие личности: способность самостоятельно ориентироваться в потоке меняющейся информации, сравнивать, анализировать, находить оптимальные варианты решений. В этом аспекте исследовательская деятельность рассматривается как форма проявления активности субъекта (поисковой, познавательной, исследовательской). Формирование опыта исследовательской деятельности происходит в процессе ее осуществления, характеризуясь последовательным переходом от репродуктивного уровня овладения деятельностью к творческому. Выделены группы исследовательских умений в зависимости от логики научного исследования: научно-информационные; методологические; теоретические; эмпирические; письменно-речевые; коммуникативно-речевые.

2. На основании, выделенных исследовательских умений определены уровни и критерии оценки сформированности исследовательской деятельности студентов технического профиля.

Основным источником содержания математического образования, очевидно, является непосредственно математическая наука на современном уровне её развития. В математике, как и в любой другой науке, выделяют три категории знания: собственно предметное знание; знание о математических методах познания; историко-научное знание.

В зависимости от требуемого уровня изложения учебного предмета, наиболее полно раскрывается та или иная область знаний этого предмета. Следующим источником формирования содержания математического образования будущего инженера, являются виды деятельности, которые отражены в элементах состава содержания математического образования: в знаниях, умениях и навыках математической деятельности; в опыте творческой деятельности; в опыте исследовательской математической деятельности.

При формировании содержания математического образования мы опирались на общедидактические принципы обучения: научности, доступности, наглядности, преемственности, последовательности и системности обучения. Вместе с тем, мы выделяем концептуальные принципы отбора содержания математического образования, направленного на формирование исследовательской деятельности студентов:

- единства учебного материала в содержании учебных элементов модулей;
- полноты и оптимальности содержательной линии дисциплины;
- принцип фундирования базовых учебных элементов математического образования будущих инженеров;
- интеграции фундаментальных и прикладных математических знаний.

Методологической основой интеграции знаний в процессе обучения математике студентов технических вузов при формировании исследовательской деятельности выступает наглядное моделирование.

3. На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы создана модель обучения математике студентов технических вузов, направленного на формирование исследовательской деятельности на основе наглядного моделирования с изложением современных методов математики: метода аналогии, расщепления и унитарных преобразований.

Формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов на основе наглядного моделирования позволяет осуществлять интеграцию математических и методологических знаний, средствами знаково-символьной наглядности. Особое значение для формирования методологической и научной культуры студентов технических вузов имеет изучение математического моделирования в курсе высшей математики, который обладает высоким научным потенциалом в решении различных научно-исследовательских задач.

Только тогда, когда усвоенная информация и приобретенные способы деятельности становятся не только предметом познания, но и инструментом для самостоятельного приобретения нового знания, можно говорить о развивающем характере познавательной деятельности.

ГЛАВА II. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СРЕДСТВАМИ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, НАПРАВЛЕННОГО НА ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ

2.1. Фундирование опыта и становление исследовательской деятельности в процессе обучения математике студентов технических вузов

Несмотря на то, что исследовательская деятельность выделена отдельным блоком, она не существует изолировано от других направленной инженерной деятельности, а органически с ними сливается. Именно от наличия у инженера исследовательских умений зависит насколько успешно он проявит себя в проектно-конструкторской, технологической, эксплуатационной монтажно-наладочной и организационно– управленческой деятельности.

Исследовательская деятельность инженера – это деятельность, направленная на получение новых знаний, что необходимо для развития производства и улучшения его технико-экономических показателей.

Глубокое теоретическое обобщение предметных знаний и способов их освоения в соответствии с целями и задачами формирования исследовательской деятельности будущих инженеров осуществляется на основе концепции фундирования опыта и процессов становления индивидуального стиля личности обучающегося.

Под фундированием будем понимать:

-процесс приобретения, освоения и преобразования опыта личности в исследовательской деятельности при создании условий для обеспечения целостного учебного процесса, при интеграции содержания научного знания с методологией открытия новых знаний, раскрывающих их сущность, целостность и междисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний,

- расширение практического опыта различных видов деятельности (учебной, самостоятельной, творческой, поисковой и др.) и вариативности индивидуального опыта в формировании профессиональной компетентности будущего инженера. Фундирующие процедуры обеспечивают:

-создание условий для обеспечения целостного учебного процесса (через организацию «субъект-субъектного» взаимодействия в процессе обучения математике, формирование ценностного отношения студентов к исследовательской деятельности; на основе компетентностного подхода в рамках изучения конкретной дисциплины);

- определение содержания научного знания в интегративной связи с методологией открытия новых знаний (через интеграцию курсов, изучаемых студентом на предыдущих этапах обучения по фундаментальным и прикладным математическим дисциплинам, а так же на спецкурсе по методологии научных исследований);

-реализации интерактивных форм, средств и методов обучения математике (через использование проектной методики и технологии веб-квестов);

- развитие мышления и формирование методологической культуры (в процессе организации поисковой, самостоятельной, творческой и исследовательской деятельности студентов) [34,141].

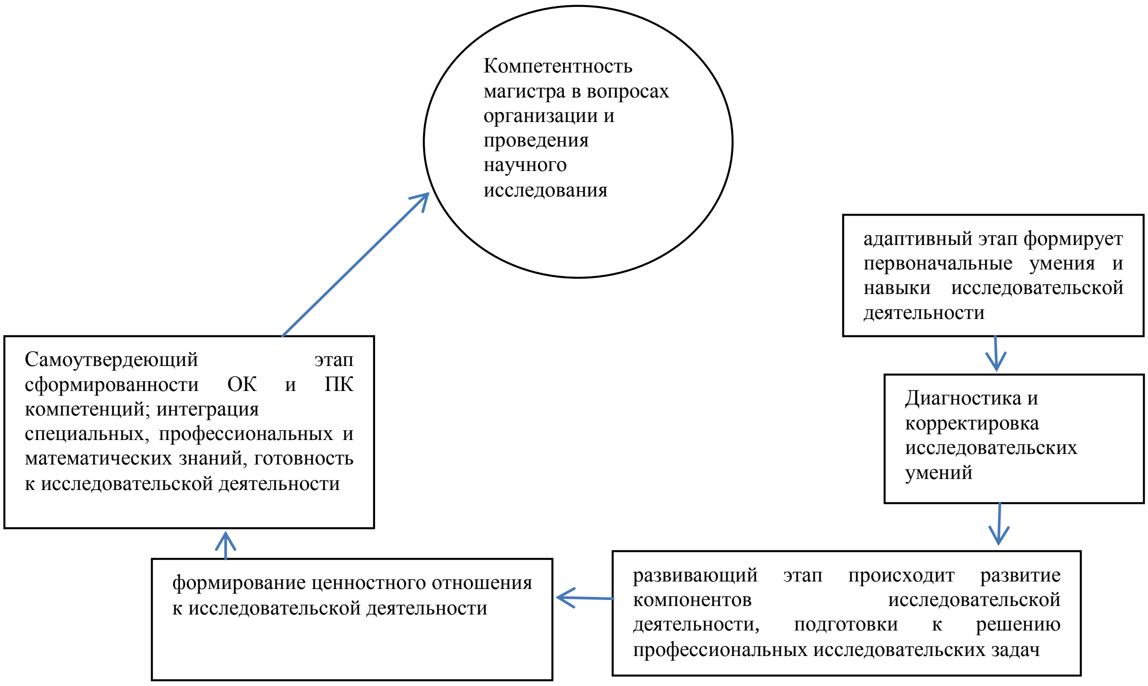
Определение содержания научного знания в интегративной связи с методологией открытия новых знаний основано на принципе методологической априорности научного исследования, позволяющей интегрировать междисциплинарные подходы, рефлексии не только общих категорий, но и различных типов методологий. Обучение направлено на интеграцию фундаментальных и прикладных математических знаний, полученных студентом на предыдущих этапах обучения.

Развитие мышления и формирование методологической культуры происходит в процессе организации поисковой, исследовательской деятельности и во многом зависит от умения студента адекватно определить цель исследования, подобрать необходимый инструментарий, выявить механизм реализации, правильно интерпретировать полученную информацию.

Реализация интерактивных форм, средств и методов обучения математике происходит через использование проектной методики (технологии веб-квестов). Веб-квест - это вид информационных, проблемно-ориентированных заданий индивидуального или группового обучения, направленных на формирование и развитие навыков самостоятельной активности, поисковой и исследовательской деятельности студентов в процессе освоения, исследования, обработки и презентации учебного материала с использованием возможностей Интернета.

В связи с этим процесс формирования исследовательской деятельности рассматривается не линейно, а имеет спиралевидный характер (схема 2)

Схема 2. Спираль фундирования формирования исследовательской деятельности



Выделим три этапа формирования исследовательской деятельности студентов:

1. Адаптивный этап закладывает начальные исследовательские умения и формирует компоненты исследовательской деятельности студентов:

- научно-информационный: в овладении практическими навыками работы со справочной и научной литературой;

- методологический: в выдвижении гипотезы и проведении теоретического анализа проблемы;

-эмпирический компонент направлен на развитие исследовательских умений сравнивать, обобщать, моделировать на основе наблюдения;

- коммуникативный: обеспечивает знание правил и приемов риторики, полемики и рефлексивного слушания.

2. Развивающий этап готовит студентов к решению профессиональных исследовательских задач через овладение специальными математическими методами исследования (аналогии, расщепления, унитарных преобразований), проводится диагностика оперирования исследовательскими умениями и их корректировка. Развитие компонентов исследовательской деятельности происходит в обогащении опыта восприятия научных текстов, участия в дискуссиях по выдвижению исходных гипотез, планировании и организации эксперимента, при анализе и обобщении полученных фактов, формулировании новых фактов и законов. Формируется ценностное отношение к исследовательской деятельности.

3. Самоутверждающий этап характеризуется сформированностью ОК и ПК, интеграцией специальных, профессиональных знаний и математических знаний, готовностью к исследовательской деятельности. Компоненты исследовательской деятельности выражаются в умении организации постановки задачи, самостоятельном поиске методов решения исследовательских задач, владении прогностическими умениями выдвигать гипотезы и находить альтернативные решения проблемы. Студент

обладает высоким уровнем рефлексивной культуры и профессиональной эрудиции [34].

Развитие опыта исследовательской деятельности идет через формирование исследовательских умений и овладение различными видами учебно-познавательной деятельности. От первичного знакомства с исследовательскими умениями (см. дис. стр.28), студенты овладевают репродуктивными действиями. Дальнейшее развитие опыта происходит через изменение компонентов исследовательской деятельности. Самостоятельный поиск решения проблем, выдвижение гипотез и овладение специальными математическими методами исследования характерно для развивающего этапа формирования ИД. На этом этапе необходимо проводить диагностику исследовательских умений и контроль математических знаний. Корректировка результатов обучения и оценка исследовательской деятельности способствуют продвижению развития деятельности от продуктивных действий к творческим. Повышает мотивацию и формирует осознанное отношение к исследовательской деятельности. На третьем этапе обучения за счет интеграции фундаментальных и прикладных знаний, овладение методом наглядного моделирования и различными видами учебно-познавательной деятельности происходит формирование общекультурных и профессиональных компетенций. Рефлексия и самооценка своей деятельности способствует приобретению ценностного отношения к исследовательской деятельности и самостоятельному открытию новых знаний. На рисунке 1 показана модель формирования исследовательской деятельности студентов в процессе обучения математике студентов технических вузов.

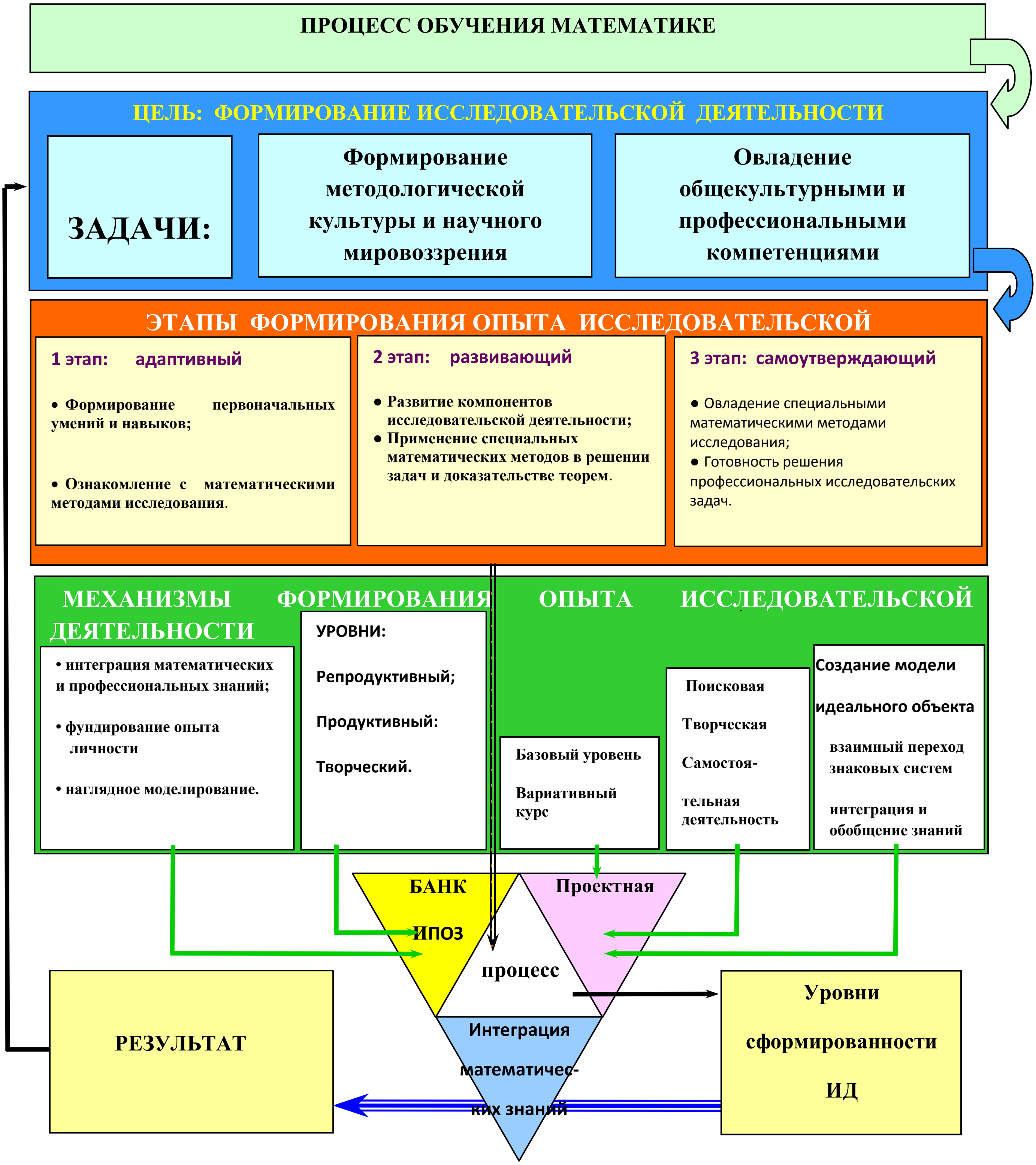


Рисунок 1. Модель формирования исследовательской деятельности студентов технических ВУЗов.

Процесс формирования исследовательской деятельности происходит по спирали. Обогащение опыта на каждом витке спирали идет благодаря интеграции математических и профессиональных знаний за счет расширения базового курса математики и вариативного выбора студентов и слияния поисковой, проектной и творческой деятельности.

В следующем параграфе этой главы раскрывается методика обучения математике студентов технических вузов, направленная на формирование исследовательской деятельности на основе наглядного моделирования. Реализация механизмов наглядного моделирования в процессе обучения математике представлена на примере преподавании курса: «Математическое моделирование и обыкновенные дифференциальные уравнения».

2.2. Методика поэтапного формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов

Процесс формализации конкретных задач очень сложен и здесь нет общего алгоритма так как, каждая практическая задача требует своих методов решения. Способность к построению математической модели некоторой системы и является той самой характеристикой, которая будет показателем уровня сформированности исследовательской деятельности будущего инженера.

Возникает потребность введения в программу по математике спецкурсов по математическому моделированию и других спецкурсов, для изложения не только последних достижений инженерной мысли, но и сбалансированных лекций и семинаров с обоснованным применением наиболее эффективных и конструктивных математических методов для анализа известных и новых классов инженерных задач.

Следует также отметить возрастающую роль различных математических методов (появление которых связано не только с внедрением компьютерной техники) в преподавании почти всех гуманитарных, медицинских, философских, и ряда с других дисциплин, а также с философским осмыслением роли математических методов в различных сферах человеческой деятельности. При наличии стандартного одноуровневого процесса обучения инженеров различных профессиональных направлений (продолжительностью 5-6 лет в зависимости от специализации инженера) в Эфиопии, как в большинстве других стран (включая и Россию) была создана за много лет преподавания программа обучения, в которой нашли достаточно сбалансированное отражение как достаточный набор профессиональных прикладных предметов, (наработок для будущий работы), так и набор(не всегда обоснованный) фундаментальных курсов по математике, физике, химии, и ряда других предметов, необходимых для овладения соответствующей профессией.

Необходимый баланс между прикладными и фундаментальными составляющими в содержании математического образования студентов технического учения далеко не всегда имел место и поэтому большинство студентов (около 70-80%) сомневались в необходимости преподавания математики на первых двух курсах университета. В предлагаемом объеме, математика воспринималась большинством студентов, как чисто теоретический достаточно сложный и не очень понятный предмет, который успешно забывался после сдачи экзамена.

При этом основы математических знаний, заложенные на первых двух курсах, заметно уменьшались на старших курсах и почти полностью исчезали к моменту получения диплома, если они не находили практического приложения. Во многих странах в настоящие время наметилось потребительское отношение к математике при подготовке различных специалистов, включая и инженеров , кроме ограниченного числа престижных высших учебных заведенной в Старом и Новом Свете. Переход на двухуровневую систему специального высшего образования бакалавров на инженерных факультетах преследовал как минимум две цели:

1. Переход на более обоснованную и менее затратную подготовку инженерных кадров достаточно высокого уровня для конкретных производственных целей;
2. Выпуск инженеров высшей категории для решения назревших задач научно-технического прогресса с использованием современных информационных и компьютерных технологий, без которых немыслимо современное производство.

При этом предполагалось сокращение некоторых разделов фундаментальных предметов без снижения общего уровня знаний математики будущих специалистов бакалавров и это могло быть достигнуто за счёт составления более грамотной, научно и методически обоснованной учебной программы специалистов нового поколения.

Но подобные ожидания в большинстве случаев не оправдались во многом из - за непродуманности методической, профессиональной и научной обоснованности этих нововведений. В большинстве ВУЗов произошло просто механическое уменьшение различных разделов (особенного фундаментальных) учебной программы, что снизило уровень подготовки будущих инженеров, который был значительно выше при одноуровневой схеме обучения. Поэтому в настоящее время остро стоит вопрос о поднятии уровня математической подготовки бакалавров и магистров, включая изложение более обоснованных фундаментальных, так и более современных профессиональных дисциплин.

Рассмотрим ряд методологических и функциональных алгоритмов, которые будут способствовать повышению уровня профессиональных и фундаментальных знаний инженера- бакалавра и магистра, и формирования исследовательских умений.

При изложении методологических и математических основ теории математического моделирования мы уделим особое внимание выбору наиболее оптимальных методических подходов и наиболее эффективных математических методов при изучении бакалаврами, магистрами, аспирантами и начинающими исследователями тех или иных нетривиальных математических моделей, а также процессу создания новых современных моделей.

Под особенностью методологических подходов при изучении различных инженерных дисциплин с учётом достижении современных науки и техники в данной области с помощью различных вариантов метода математического моделирования мы будем понимать наиболее грамотную и методически обоснованную структуру создаваемой математической модели, наиболее точно описывающую (без излишней детализации) исследуемую инженерную задачу (что совершенно необходимо в процессе изучения конкретных задач математического моделирования), позволяющих не только хорошо понимать, применять на практике изложенный материал, но и быть методически готовым для исследования более сложных математических задач исследовательского характера.

Говоря об эффективности используемого математического аппарата при изложения основ математического моделирования и в процессе построения и изучения конкретной математической модели, следует обратить особое внимание на сравнительный анализ различных математических моделей (используемых для исследования конкретного инженерного устройства или процесса) и различных математических методов (для исследования построенной модели) с последующим и обоснованным выбором той или иной математической модели и соответствующего математического аппарата для её изучения.

Этот выбор должен быть сделан с учётом математической подготовки слушателей и способствовать описанию не только известных свойств и параметров изучаемой моделируемой конструкции (или процесса), но и предсказывать какие – либо новые свойства данной модели и исходного реального устройства (или процесса).

В процессе построения и изучения нужной математической модели большую роль играют педагогический и математический опыт преподавателя.

Под эффективностью используемых математических методов, при изложении основ математического моделирования, в нашей работе мы будем понимать обоснованный выбор той или иной математической модели исследуемого явления или объекта. Также соответствующего математического метода анализа и решения выбранной математической модельной задачи, для выбора наиболее конструктивного и эффективного (по сравнению с другими) математического метода исследования, удобного как для приближенного качественного, так и для более точного численного анализа.

При изучении различных математических модельных задач могут быть использования различные методические и математические алгоритмы и схемы.

Ниже мы обратим особое внимание на метод аналогий при исследовании инженерных модельных задач различного класса.

Возможностям этого метода не всегда уделяется должное внимание в процессе преподавания и процессе проведения научно- исследовательских работ различного уровня.

Предложенные методы анализа могут быть также весьма полезными при изучении большого класса нелинейных задач теории устойчивости, а также при исследовании динамики решения конкретных нелинейных модельных задач, что позволяет обходиться без аппарата функций Ляпунова, сохраняя эффективность и в критических случаях.

Метод внутренний аналогии в данном случае предполагает:

1. Сведение исследуемых нелинейных модельных уравнений, описывающих различные физические, социальные, биологические и некоторые другие исследуемые процессы к матричной форме записи;

2. Анализ полученных (в некотором смысле аналогичных) нелинейных систем ОДУ и изучение характера существующих изолированных точек покоя;
3. Выявление внутреннего (математически обоснованного) сходства различных нелинейных систем ОДУ, возникающих при описании различных изучаемых процессов, что позволит применить метод внутренний аналогии.
4. Для простейших моделей в некритических случаях для анализа найденных точек покоя можно применить теорему Ляпунова об асимптотический устойчивости по первому приближению (то есть, здесь применим метод «прямого аналогии»).
5. В критических случаях (когда спектр матрицы изучаемой линеаризованной системы в данной точке покоя являются чисто мнимым) может быть использован более сложный классический метод функций Ляпунова, для построения которых в общем случае пока нет достаточно конструктивного алгоритма;
6. Наличие внутренней аналогии при изучении полученных нелинейных модельных систем позволяет в некоторых случаях (особенно при анализе критических точек покоя) применять достаточно новый (но весьма эффективный) метод унитарных преобразований, основные моменты которого изложены в теоремах 2.1-2.7 и в работах [68, 69].

   Наличие внутренней аналогии (внутреннего обоснованного сходства) для сравнительного анализа при исследовании квазилинейной систем вида:

   $\dot{z}$ =A(z)z (2.1)

с нелинейной нормальной матрицей A(z)позволило применить метода аналогий и спектральный вариант метода унитарных преобразований) [68, 69,70]в данной работе в следующих случаях:

а) в тех случаях, когда нелинейная матрица $A(z)$ исходной системы ОДУ является [38,85] нормальной (т.е. имеет место, тождественное равенство:

$A(z)A^{*}(z) \equiv A^{*}(z)A(z)$в некоторой области в Ω: $\{|z| \leq R\}$),

b) либо, в случае, когда в областиΩ существует специальная диагональная матрица $\bar{Q}(z)$ такая, что матрица $B(z) = \bar{Q}(z)A(z)$ является нормальной,

с) либо, в другой ситуации, когда матрица$A(z)$ исходной системы является областиΩ суммой нормальных матриц, то есть в случае, когда для системы $\dot{z}$ =A(z)z матрица A(z) представима виде A(z) $= B(z) + T(z)$ суммы нормальных матриц B(z) и T(z).

Обучение методу аналогии идет в три этапа, согласно спирали фундирования опыта исследовательской деятельности студентов в обучении математике.

На первом этапе обучения на первом курсе в рамках дисциплины «Математика» метод аналогии в данном случае предполагает:

- ведение исследуемых нелинейных модельных уравнений, описывающих различные физические, социальные, биологические и некоторые другие исследуемые процессы к матричной форме записи;
- анализ полученных (в некотором смысле аналогичных) нелинейных систем ОДУ и изучение характера существующих изолированных точек покоя.

На этом этапе следует показать возможность записи формулы дифференциальных уравнений (в конкретных примерах) в компактной матричной форме. Запись исследуемых модельных уравнений в векторно-матричной форме (более удобной для последующего анализа) позволяет воспользоваться методом внутренней аналогии и алгебраическим методом унитарных преобразований для анализа устойчивости исследуемых математических модельных процессов, включая критические случаи, когда спектр матрицы построенной молельной системы ОДУ лежит на мнимой оси.

Остановимся более подробно на матричной форме записи нелинейных модельных дифференциальных уравнений и систем некоторых физических и биологических процессов

Матричная форма записи система ОДУ позволяет в некоторых случаях изучать различные процессы с единой точки зрения, что дополняет, или уточняет известные ранее результаты [65, 95, 124].

Рассмотрим ряд содержательных нетривиальных модельных нелинейных систем вида (2.1) дифференциальных уравнений, описывающих различные физические и биологические процессы, включая критические случаи, и покажем возможность записи этих уравнений в векторной матричной форме

.**Пример 2.1.** В работе [95, с 74] изучена механическая система, поведение которой может быть описано с помощью нелинейного дифференциального уравнения второго порядке.

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx^m = 0; \qquad (a, b > 0;\ m = 2k + 1)$ (2.2)

с одной степенью свободы под действием потенциальной нелинейной силы и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости.

В работе [95] с использованием теоремы Барбашина - Красовского приведено достаточно громоздкое (теорема Ляпунова здесь неприменима) доказательство устойчивости решения дифференциального уравнения (2.2)

На втором этапе формирования исследовательской деятельности при решении задач и доказательстве теорем в обосновании гипотезы применения метода аналогии и унитарных преобразований развиваются следующие исследовательские умения, которые позволят применить метод внутренний аналогии:

- выявление внутреннего (математически обоснованного) сходства различных нелинейных систем ОДУ, возникающих при описании различных изучаемых процессов;

- проведение анализа для простейших моделей в некритических случаях для нахождения точек покоя.

На этом этапе, чтобы воспользоваться методом внутренней аналогии и алгебраическим методом унитарных преобразований, преобразуем уравнение (2.2) к системе ОДУ с нелинейной матрицей:

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay - bx^m; \\ \dot{x} = \qquad\quad y; \end{cases} (m = 2k + 1);$$

или в матричной форме:

$$\dot{y} = A(y)y;$$

$$\left(A(y) = \begin{pmatrix} (-a) & (-bx^{2k}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right); \qquad \left(y = (\dot{x}, x)\right)^T$$

и преобразуем полученную систему (с учётом известных точек покоя) к системе нормальном матрицей.

После невырожденной замены

$$y = S_0 z\,; \quad \left(S_0^{-1}A(0)S_0 = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

мы имеем возможность перейти к другой квазилинейной эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{z} = B(z)z; \quad \left(B(z) = \begin{pmatrix} -a + q(x) & q(x) \\ -q(x) & -q(x) \end{pmatrix}; q(x) = {bx^{2k}}/{a} > 0\right)$$

более удобной для дальнейшего анализа.

Пример 2.2. Известное модельное уравнение колебаний маятника, описанное с помощью нелинейного дифференциального уравнения второго порядке:

$\ddot{x} + \omega^2 sinx = 0$,(2.3)

может быть записано в виде эквивалентной квазилинейной системы ОДУ с нелинейной матрицей:

$$\dot{y} = A(y)y;\ \ A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(x) & 0 \end{pmatrix};$$

$(y = (x, \dot{x})^T,\ a^2(x) = \omega^2 \frac{sinx}{x} > 0;\ \ |x| < \pi)$(2.4)

с двумя точками покоя $P_0 = (0{,}0)$и$P_1 = (\pi, 0)$, что удобно для дальнейшего исследования.

В точке $P_0(0{,}0)$ мы имеем критический случай, так как матрица $A(P_0)$ имеет в этом случае чисто мнимый спектр $\lambda_{Aj} = \pm i\omega$.

Точка покоя $P_1(\pi, 0)$ будет неустойчивой по первому приближению, так как спектр матрицы $A(P_1)$ имеет точки спектра $\lambda_{Aj} = \pm\omega$разного знака.

Пример 2.3. Консервативная механическая система (без трения) с одной степенью свободы [65, с.175] описывается модельным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$\ddot{x} = f(x);$ (2.5)

$$(f(0) = 0;\ f(x) \in C^1(\Omega);\ \Omega\colon \{|x| < R\};\ \ f(x) = f'(\xi)x),$$

которое эквивалентно квазилинейной системе ОДУ с нелинейной матрицей:

$\dot{y} = A(y)y;\qquad A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(\xi) & 0 \end{pmatrix};\qquad y = (x, \dot{x})^T.$ (2.6)

При наличии строгого минимума потенциальной энергии

$U(x) = -\int_0^x f(t)\,dt$ в точке $x = 0(f'(\xi) < 0;\quad |x| < \delta\,)$ матрица $A\,(0)$ имеет в точке $x = 0$ чисто мнимый спектр $\lambda_{Aj} = \pm\sqrt{f'(\xi)}$, то есть здесь мы имеем критический случай, что вызывает затруднения при анализе системы (2.6)

Пример 2. 4. Простейшая модель генетического механизма у бактерий описывается модельной нелинейной системой ОДУ второго порядка [124, с 55]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{y} - a; \\ \dot{y} = qx - b, \end{cases} (a, b, p, q > 0); (2.7)$$

с точкой покоя $P_0 = (x_0, y_0) = ({}^{b}/_{q} ;\ {}^{p}/_{a})$.

После замены $x = x_1 + x_0$; $y = y_1 + y_0$ перейдём к более удобной эквивалентной квазилинейной системе с нелинейной матрицей

$$\dot{z} = A(z)z;\ (A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -f(y_1) \\ q & 0 \end{pmatrix};$$

$f(y_1) = \frac{a}{y_1 + y_0} > 0, z = (x_1, y_1)^T$, $|y_1| < y_0$), (2.8)

где матрица $A(0)$ имеет в точке покоя (0,0) чисто мнимый спектр

$\lambda_{Aj} = \pm i\sqrt{qf(y_1)}$, то есть здесь мы имеем критический случай, что не всегда удобно для дальнейшего анализа известными методами [55, 95, 65, 124]. **Пример** 2.5. В биологии динамика взаимодействующих популяций («хищник-жертва») описывается [4, с 203] нелинейной модельной системой уравнений Вольтерра–Лотка:

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - by)x; \qquad (a, b, c, d > 0); \\ \dot{y} = -(c - dx)y; \end{cases} (2.9)$$

с двумя точками покоя $P_0(0,0) u P_1 = ({}^{c}/_{d} ; {}^{a}/_{b})$.

В первом случае (в точке P_0) имеем седло, то есть неустойчивую точку покоя. Во втором случае для анализа устойчивости точки покоя P_1 после преобразований сдвига:

$x = x_1 + x_0$; $y = y_1 + y_0$, перейдем к более удобной квазилинейной системе:

$$\dot{z} = A(z)z; \quad (A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -p(x_1) \\ q(y_1) & 0 \end{pmatrix}; \quad z = (x_1, y_1)^T; (2.10)$$

$$p(x_1) = b\left(x_1 + {}^{c}/_{d}\right) > 0; \ q(y_1) = d\left(y_1 + {}^{a}/_{b}\right) > 0;$$

$$|x_1| < {}^{c}/_{d}; |y_1| < {}^{a}/_{b}),$$

с нелинейной матрицей A(z) и точкой покоя (0,0),

где матрица $A(0)$ имеет чисто мнимый спектр $\lambda_{0j} = \pm i\sqrt{ac}$, что соответствует критическому случаю.

Алгебраический анализ модельных квазилинейных систем с нелинейной матрицей методом аналогий с учётом унитарных преобразований

В общем курсе математики изучаются вопросы устойчивости квазилинейных систем вида $\dot{x} = Ax + f(x,t)$ с постоянной матрицей A, гарантируя асимптотическую устойчивость решения при $R_e\lambda_j < -\sigma_0 < 0$ (λ_j – спектр матрицы A,($j = \overline{1,n}$) – это теорема Ляпунова)

В более общем случае при анализе систем вида $\dot{x} = A(x,t)x + f(x,t)$аналогичный спектральный подход не работает, т.к. нет обоснования.

Ибо существует пример

$$\dot{x} = A(t)x; \quad x(t_0) = x_0; \; A(t) = \begin{pmatrix} (-1 - 2cos4t) & (-2 + 2sin4t) \\ (2 + 2sin4t) & (-1 + 2cos4t) \end{pmatrix},$$

хотя реальная часть $\lambda_j = -1 < 0$. но в этом случае система имеет неустойчивое решение, что доказано в монографии [22], что подтверждает неприменимость для данной системы спектрального подхода.

Теорема 2. 1. Для квадрата евклидовой нормы решения системы

$\dot{x} = A(x,t)x; x(0) = x_0$(2.11)

справедливо дифференциальное равенство

$$\frac{d|x|^2}{dt} = 2Re(x^*A(x,t)x \;, \;\; (x \in C^n).$$

Доказательство. С учётом того, что евклидова норма может быть представлена в виде $|x|^2 = x^*x = \sum_1^n x_j^2$; $(x = (x_1, \dots, x_n))^T$, и длясопряжённой (относительно системы (2,11)) системы ОДУ имеет место равенство $\dot{x}^* = x^*A^*(x,t)$, запишем дифференциальное уравнение для евклидовой нормы решения системы (2.11):

$$\frac{d|x|^2}{dt} = \frac{d(x^*x)}{dt} = \dot{x}^*x + x^*\dot{x} = x^*A^*(x,t)x + \; x^*A(x,t)x =$$

$= 2Re(x^*A(x,t)x)$, что и требовалось доказать. 2 этап осуждении в аудитории

Теорема 2. 2.Если для задачи Коши для квазилинейной системы вида:

$\dot{x} = \; A(x,t)x; \;\; x(0) = x_0, \;\; (x \in C^n)$(2.12)

с нормальной нелинейной матрицей $A(x,t)$ [31,89], когда в области $\Omega = \{|x| < R; t \geq 0\}$ имеет место тождественное равенство:

$(A^*(x,t)A(x,t) \equiv A(x,t)A^*(x,t))$

и её спектр $\{\lambda_{Aj}(x,t)\}_1^n$ удовлетворяет в области Ωравенствам:

$Re\lambda_{Aj}(x,t) \equiv \varphi(t)|x|^{\alpha}; \qquad (\alpha \geq 0, \quad j = \overline{1,n})$,(2.13)

тогда евклидова норма решения системы (2.12) удовлетворяет дифференциальному равенству $\frac{d|x|^2}{dt} = \varphi(t)|x|^{2+\alpha}$ и имеет место соответствующая оценка:

$|x(t)| = |x_0| exp b(t); \qquad (\alpha = 0)$; (2.14)

или$|x(t)| = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{|x_0|^{\alpha}} - \alpha b(t)}}; \quad (\alpha > 0; \quad b(t) = \int_0^t \varphi(t)dt).|x_0| \neq 0$ (2.15)

Доказательство. С учетом существования [7,11] унитарной подстановки:

$x = U_A(x,t)y; \quad (|x(t)| \equiv |y(t)|)$;

$$(U_A{}^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t) = \Lambda_A(x,t) = diag\{\lambda_{A1}(x,t), \dots, \lambda_{An}(x,t)\};$$

имеет место дифференциальное равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re(x^*A(x,t)x) = Re(y^*U_A^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t)y) =$$
$$= Re(y^*\Lambda_A(x,t)y) =$$

$$= Re\left(\sum_1^n \lambda_{jA}(x,t)\left|y_j\right|^2\right) = \varphi(t)|x|^2|x|^{\alpha};$$

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \varphi(t)|x|^2|x|^{\alpha}.$$

Если $\alpha = 0$, тогда $\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = \varphi(t)|x|^2$,

пусть $|x|^2 = z(t)$, т.е. $\frac{1}{2}\frac{dz}{dt} = \varphi(t)z, \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z} = 2b(t)$;

$$\ln\ |z|_{z_0}^{z} = 2b(t);$$

$z(t) = z_0 e^{2b(t)}$, откуда имеем $|x(t)|^2 = |x_0|^2 e^{2b(t)}$,т.е. $|x(t)| = x_0 e^{b(t)}$.

В случае, если $\alpha > 0$; $\frac{1}{2}\frac{dz}{dt} = \varphi(t)z^{1+\frac{\alpha}{2}}$, $\quad \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^{1+\frac{\alpha}{2}}} = 2b(t)$,

то есть $\quad \frac{-2}{\alpha}\left(z^{\frac{-\alpha}{2}} - z_0^{\frac{-\alpha}{2}}\right) = 2b(t)$

$z^{\frac{-\alpha}{2}} - z_0^{\frac{-\alpha}{2}} = -\alpha b(t)$, что позволяет записать:

$$z(t) = \left(-\alpha b(t) + |z_0|^{\frac{-\alpha}{2}}\right)^{\frac{-2}{\alpha}}.$$

Поэтому справедливы оценки:

$|x(t)| = \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{|x_0|^{\alpha}} - \alpha b(t)}} \to 0$. $\quad (t \to +\infty, \quad \alpha > 0)$ и

$$|x(t)| = |x_0| exp b(t) \to 0 \quad (t \to +\infty, \alpha = 0).$$

При этом (в любом случае при $\alpha = 0$ или $\alpha > 0$), имеет место при $b(t) \to -\infty$, $(t \to +\infty)$ асимптотическая устойчивость решения начальной задачи (2.11), а в случае $|b(t)| \leq C$ имеет место устойчивость решения начальной задачи (2.11), что и требовалось доказать.

Следствие.

1.Решение системы $\dot{x} = A(x,t)x$ с кососимметрической $(A^T = -A)$, или косоэрмитовой $(A^* = -A)$ матрицей всегда устойчиво, так как в этом случае нелинейнаяматрица $A(x,t)$, являясь нормальной, имеет чисто мнимый спектр [38,85], то есть $Re\lambda_{Aj}(x,t) \equiv 0$, $\left(j = \overline{1,n.}\right)$.

Пример. Решение системы с кососимметрической нормальной нелинейной матрицей:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} (\sigma + cost)|x|^{\alpha} & (tx_1x_2) \\ (-tx_1x_2) & (\sigma + cost)|x|^{\alpha} \end{pmatrix} x; \; (\alpha \geq 0)$$

в силу теоремы 2.2 асимптотически устойчиво при $\sigma<0$,устойчиво в случае$\sigma=0$ и не устойчиво при $\sigma>0$.

Теорема 2.3 (Аналог принципа суперпозиции для нелинейных систем).

Если квазилинейная система

$\dot{x}=\big(A(x,t)+B(x,t)\big)x; \quad x(0)=x_0; \quad$ x$\in R^n$) (2.16),

с нормальными в $\Omega: \{|x|\leq R; t\geq 0\}$ нелинейными матрицами $A(x,t)$ и $B(x,t)$ для их спектра $\{\lambda_{Aj}(x,t)\}_1^n u\,\{\lambda_{Bj}(x,t)\}_1^n$ справедливы в Ω соотношения:

$Re\lambda_{Aj}(x,t)\leq\varphi_A(t); \quad Re\lambda_{Bj}(x,t)\leq\varphi_B(t); \quad \big(j=\overline{1,n}\big),$

тогда для евклидовой нормы решения начальной задачи (2.16) справедлива оценка:

$|x(t)|\leq|x_0|expb(t); \qquad (b(t)=\int_0^t(\varphi_A(t)+\varphi_B(t))dt).$ (2.17)

Доказательство. С учетом существования унитарных подстановок:

$x=U_A(x,t)y$ и $x=U_B(x,t)z$, ($|x(t)|\equiv|y(t)|\equiv|z(t)|$),

$(U_A{}^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t)=\Lambda_A(x,t)=diag\{\lambda_{A1}(x,t),\dots,\lambda_{An}(x,t)\};$

$U_B{}^*(x,t)B(x,t)U_B(x,t)=\Lambda_B(x,t)=diag\{\lambda_{B1}(x,t),\dots,\lambda_{Bn}(x,t)\};$

имеет место дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned}\frac{d|x|^2}{dt}&=2Re(x^*A(x,t)x)+2Re(x^*B(x,t)x)\\&=2Re(y^*\Lambda_A(x,t)y)++2Re(z^*\Lambda_B(x,t)z)\\&\leq 2(\varphi_A(t)+\varphi_B(t))|x|^2,\end{aligned}$$

откуда и получаем нужный результат (2.17)$|x(t)|\leq|x_0|expb(t)$, что гарантирует устойчивость решения при $|b(t)| \le C\ (t \ge 0)$, или асимптотическую устойчивость при$b(t) \to -\infty (t \to +\infty)$.

Следствие. Если при анализе неавтономной квазилинейной системы вида (2.16) с двумя нормальными нелинейными матрицами$A(x,t)$и$B(x,t)$, где матрица$B(x,t)$являются кососимметрической или косоэрмитовой (т.е. имеет чисто мнимый спектр), тогда поведение решения системы (2.16) полностью определяется спектром нормальной матрицы $A(x,t)$.

Теорема 2.4.Если для квазилинейной системы

$$\dot{x} = \big(A(x,t) + B(x,t)\big)x; \quad x(0) = x_0 \tag{2.18}$$

при наличии двух непрерывных нелинейных нормальных в области Ω матрицам$A(x,t)$ и $B(x,t)$ их спектр $\{\lambda_{Aj}(x,t)\}_1^n$ и $\{\lambda_{Bj}(x,t)\}_1^n$ удовлетворяетв области Ωнеравенствам:

$$Re\lambda_{Aj}(x,t) \le -\sigma_1|x|^\alpha; Re\lambda_{Bj}(x,t) \le -\sigma_2|x|^\beta;$$

$$(j = \overline{1,n}\,; \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad \beta \ge \alpha \ge 0),$$

тогда тривиальное решение системы (2.18) асимптотической устойчиво.

Доказательство. С учётом непрерывных унитарных замен:

$$x = U_A(x,t)y; x = U_B(x,t)z, \ \ (|x(t)| \equiv |y(t)| \equiv |z(t)|, \qquad t \ge 0)$$

$$U_A{}^*(x,t)A(x,t)U_A(x,t) = \Lambda_A(x,t) = diag\{\lambda_{A1}(x,t), \dots, \lambda_{An}(x,t)\};$$

$$U_B{}^*(x,t)B(x,t)U_B(x,t) = \Lambda_B(x,t) = diag\{\lambda_{B1}(x,t), \dots, \lambda_{Bn}(x,t)\};$$

устойчивость или асимптотическая устойчивость тривиального решения следует из дифференциального неравенства

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re(x^*A(x,t)x) + Re(x^*B(x,t)x) =$$

$$= Re(y^*\Lambda_A(x,t)y) + Re(z^*\Lambda_B(x,t)z) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{Aj}(x,t)\left|y_j\right|^2 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{Bj}(x,t)\left|z_j\right|^2 \le$$

$$\le -\sigma_0|x|^{\alpha}|y|^2 - \sigma_2|x|^{\beta}|z|^2 \le (-\sigma_1|x|^{\alpha})(1+\sigma_2{\sigma_1}^{-1}|x|^{\beta-\alpha})|x|^2 \le$$

$$\le (-\sigma_0|x|^{\alpha})|x|^2; (0 < \sigma_0 < \sigma_1),$$

приводя к оценке нормы решения ($|x_0| \neq 0$):

$|x(t)| \le \frac{1}{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{|x_0|^{\alpha}}+\alpha t}} \to 0$; $\quad (t \to +\infty, \quad \alpha > 0)$, что и доказывает асимптотическую устойчивость решения системы (2.18).

Теорема 2.5 Если для квазилинейной системы:

$\dot{x} = A(x,t)x; \quad x(0) = x_0$(2.19)

существует в области $\Omega: \{|x| \le R; t \ge 0\}$ диагональная матрица

$\overline{Q}(x) = diag\{q_1(x_1), \dots, q_n(x_n)\}; (q_j(x_j) > 0; \quad j = \overline{1,n})$,

такая, что матрица $B(x,t) = \overline{Q}(x)A(x,t)$ является в областиΩ нормальной и её спектр $\{\lambda_{Bj}(x,t)\}_1^n$ удовлетворяет неравенствам:

$$Re\lambda_{Bj}(x,t) \le -\beta(x) < 0\,; \left(j = \overline{1,n};\ |x| \neq 0\right),$$

(где $\beta(x) > 0$ непрерывная скалярная функция), тогда тривиальное решение начальной задачи (2.19) асимптотически устойчиво, а в случае$Re\lambda_{Bj}(x,t) \le 0 \quad \left(j = \overline{1,n},\ x,t \in \Omega\right)$ –устойчиво.

Доказательство следует из существования функции Ляпунова:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{x_j} s q_j(s) ds > 0; \qquad \left(x_j \neq 0;\ j = \overline{1,n}\right),$$

если учесть, что её производная в силу системы (2.19) равна:

$$\frac{dv}{dt}\,|_{(2.19)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j q_j(x_j)\,\dot{x}_j = x^T\overline{Q}(x)\dot{x} =$$

$$= x^T\overline{Q}(x)A(x,t)x = x^T B(x,t)x.$$

При этом (с учётом существования в этом случае унитарной подставки [38,85]$x = U_B(x,t)y$) можно записать:

$$\frac{dv}{dt}\,|_{(2.18)} = y^T\Lambda_B(x,t)y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{Bj}(x,t)\,|y_j|^2 \le -\beta(x)|x|^2,$$

что и требовалось доказать.

С помощью изложенного метода внутренней аналогии и метода унитарных преобразований (с учётом теорем 2.1-2.5) исследуем рассмотренные выше примеры."

Пример 2.1. Для квазилинейной системы (2.2):

$$\dot{z} = B(z)z;\ z(0) = z_0; \quad B(z) = \begin{pmatrix} -a + q(x) & q(x) \\ -q(x) & -q(x) \end{pmatrix};$$

$$(q(x) = {}^{\mathrm{bx}^{2k}}/_{\mathrm{a}} > 0\ )$$

нелинейная матрица $B(z)$ представима в виде суммы двухнелинейных нормальных матриц:

$$B(z) = P(z) + T(z); (P(z) = \begin{pmatrix} -a + q(x) & 0 \\ 0 & -q(x) \end{pmatrix},$$

$$T(z) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}).$$

Поэтому в силу теоремы 2.3 в случае $(0 < q(x) < a)$ имеем асимптотически устойчивое решение с областью притяжения$(|x|^{2k} < {a^2}/{b})$, так как матрица $T(z)$ имеет чисто мнимый спектр$\lambda_{Tj}(z) = \pm iq(x)$.

Пример 2.2. Модельное уравнение колебаний маятника (2.3) приводит к эквивалентной системе (2.4) с нелинейной матрицей:

$$\dot{y} = A(y)y; \quad A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(x) & 0 \end{pmatrix};$$

$$y = (x, \dot{x})^T; (a^2(x) = \omega^2 \frac{sinx}{x} > \ 0; \ |x| < \pi). \qquad (2.20)$$

Так как существует диагональная матрица $\overline{Q}(x) = \begin{pmatrix} a^2(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ такая, что матрица

$B(x) = \overline{Q}(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & a^2(x) \\ -a^2(x) & 0 \end{pmatrix}$, является нормальной в исследуемой области *Ω*, то в силу теоремы 2.5, нулевая точка$P_0(0{,}0)$ - покоя системы (2.20) и исходного уравнения (2.3) будет и в данном критическом случае устойчивой, так как нормальная матрица $B(x)$, являясь кососимметрической, имеет чисто мнимый спектр $\lambda_{jB}(x) = \pm ia^2(x)$.

На третьем этапе углубления и расширения знаний и приобретения самостоятельного опыта исследовательской деятельности, наглядное моделирование становится не только целью, но и средством изучения математики в техническом вузе. Поэтому для будущего инженера изучение математического моделирования имеет двойственный характер: с одной стороны оно является сквозным, должно пронизывать весь курс высшей математики, начиная с первых дней изучения, с другой – может быть выделен в некоторый отдельный спецкурс для углубленного изучения.

Показывая на каждом занятии примеры различных способов построения моделей, можно сформировать особое свойство мышления, которое позволяет, как сквозь призму рассматривать реальные задачи, используя математические методы.

Данный курс направлен на формирование у бакалавров и магистров общих представлений о теоретико-методологических основах научно-исследовательской деятельности, формирование методологической и научной культуры. Метод аналогии предлагается рассмотреть в критических случаях (когда спектр матрицы изучаемой линеаризованной системы в данной точке покоя являются чисто мнимым) может быть использован более сложный классический метод функций Ляпунова, для построения которых в общем случае пока нет достаточно конструктивного алгоритма.

Наличие аналогии при изучении полученных нелинейных модельных систем позволяет в некоторых случаях (особенно при анализе критических точек покоя) применить достаточно новый, но весьма эффективный метод унитарных преобразований. Конструктивное сочетание метода аналогий с методом унитарных преобразований позволило изучить (не претендуя на универсальность) важный класс модельных квазилинейных систем ОДУ с нелинейной нормальной матрицей и исследовать целый ряд физических и биологических процессов, изучение которых сводится к анализу устойчивости решений соответствующих модельных систем ОДУ.

В спецкурсе мы выделим класс квазилинейных систем ОДУ, для которых остаются верным предложенный А.М. Ляпуновым спектральный метод, что является основой для применения обоснованного метода аналогии.

Исследуем далее полученные выше квазилинейные системы ОДУ с нелинейной матрицей и с помощью метода аналогий [77] и алгоритма метода унитарных преобразований [68, 69] и получим достаточные критерии устойчивости тривиального решения построенных выше квазилинейных систем ОДУ.

Предварительно приведем доказательство некоторых нетривиальных утверждений, необходимых для изложения основ метода унитарных преобразований [68, 69]

Пример 2. 3. Исследование консервативной механической системы (2.5) приводит к эквивалентной системе (2.6):

$$\dot{y} = A(y)y;\ A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(\xi) & 0 \end{pmatrix}; \quad (-f'(\xi) < 0).$$

В силу теоремы 2.5 и существования диагональной матрицы $\overline{Q}(x) = \begin{pmatrix} -f'(\xi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицы $B(y) = \overline{Q}(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & -f'(\xi) \\ f'(\xi) & 0 \end{pmatrix}$, которая, являясь нормальной, имеет чисто мнимый спектр $\lambda_{Bj} = \pm i f'(\xi)$, поэтому точка покоя $x = 0$ исходного уравнения (2.5) будет устойчивой.

Пример 2.4. Так как анализ генетического механизма у бактерий может быть описан модельной уравнением (2.7) эквивалентной системе (2.8):

$$\dot{z} = A(z)z; \quad A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -f(y_1) \\ q & 0 \end{pmatrix}; \left(f(y_1) = \frac{a}{y_1 + y_0} > 0 \right),$$

тогда в силу теоремы 2.5 существует диагональная матрица $\overline{Q}(z) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & f(y_1) \end{pmatrix}$ и нормальная матрица $B(z) = \overline{Q}(z)A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -qf(y_1) \\ qf(y_1) & 0 \end{pmatrix}$ с чисто мнимым спектром $\lambda_{Bj} = \pm iqf(y_1)$, что гарантирует устойчивость точки покоя $P_0 = \left({}^{b}/_{q}\ ,\ {}^{p}/_{a} \right)$.

Пример 2.5. Анализ математической модели нелинейной системы (2.9) биологической модели Вольтерра–Лотка, описывающей взаимодействующих двух популяций «хищнк – жертв», мы свели к исследованию эквивалентной квазилинейной системы (2.10) с нелинейной матрицей:

$$\dot{z} = A(z)z;\ \ A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -p(x_1) \\ q(y_1) & 0 \end{pmatrix};$$

$$(z = (x_1, y_1)^T;\ \ p(x_1) = b\left(x_1 + \frac{c}{d}\right) > 0;$$

$q(y_1) = d\left(y_1 + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right) > 0$).

Используя результаты теоремы 2.5, найдём диагональную матрицу

$\overline{Q}(z) = \begin{pmatrix} p^{-1}(x_1) & 0 \\ 0 & q^{-1}(y_1) \end{pmatrix}; (p^{-1}(x_1), q^{-1}(y_1) > 0)$, позволяющую построить нормальную матрицу $B(z) = \overline{Q}(z)A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которая,являясь кососимметрической имеет чисто мнимый спектр $\lambda_{Bj} = \pm i$, что гарантирует устойчивость точки покоя $P_1 = \left({}^{c}/_{d}\ ,\ {}^{a}/_{b}\right)$ исходной системы (2.9)

Пример 2.6. При анализе неавтономной нелинейной системы [95, с.68]

$\dot{x} = (Esint + \mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{t}))\mathrm{x};\ \ (\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}),$ (2.21)

(где $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ кососимметрическая матрица), применение метода функций Ляпунова в стандартной форме $\mathrm{v}(x) = |x|^2$ не дает результата, так как её производная в силу системы $\dot{\mathrm{v}}|_{(2.21)} = 2vsint$ не является знакопостоянной.

Устойчивость тривиального решения в работе [95] доказывается с помощью достаточно громоздкого метода сравнения.

Этот же результат может быть получен более просто с помощью более современного и конструктивного метода унитарных преобразований[69],теоремы 2.3 и следствия к ней, так как матрицы $Esint$ и $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ являются нормальным.

С учетом того, что матрица $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$,являясь кососимметрической и имеет чисто мнимый спектр, то тривиальное решение системы (2.21) будет устойчивым, ибо (с учётом теоремы 2.3)-спектр матрицы $Esint$ удовлетворяет условию $\int_0^t sin\tau d\tau \le C$.

Пример 2.7. Нелинейная система [95, с.20]

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + bx\rho; \\ \dot{y} = ax + cy\rho; \end{cases} \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right)(2.22)$$

в окрестности нулевой точки покоя $P_0 = (0{,}0)$ может быть записана в квазилинейной форме:

$$\dot{z} = (A(z) + B)z, \qquad (2.23)$$

где нелинейная матрица системы (2.22) может быть представлена в виде суммы двух нормальных матриц $A(z)$иB с диагональной нормальной матрицей $A(z) = \begin{pmatrix} b\rho & 0 \\ 0 & c\rho \end{pmatrix}$ и кососимметрической нормальной матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, имеющей чисто мнимый спектр $\lambda_{jB} = \pm i|a|$.

Поэтому в силу теоремы 2.3 (и следствия к ней) тривиальное решение системы (2.22) будет асимптотически устойчивым при b, c <0, и устойчивым при $b = c = 0$, а в случае b, $c > 0$ неустойчивым.

Теорема 2.6. Если при анализе неавтономной квазилинейной системы:

$$\dot{x} = A(t)x + f(x,t); \;\; x(0) = x_0; \;\; (x, f \in R^n; \;\; f(0,t) \equiv 0); \;\; t \ge 0)(2.24)$$

с нормальной (непрерывной при $t \ge 0$} T-периодический матрицей $A(t)$

$$(A(t)(A^*(t)A(t) \equiv A(t)A^*(t))$$

её спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ удовлетворяет неравенствам:

$$Re\lambda_j(t) \le -\sigma_0 + \varphi(t); (\sigma_0 > 0, \; j = \overline{1,n}; \;\; \int_0^t \varphi(s)ds \le C),$$

и для достаточно гладкой функции $f(x,t)$ справедлива оценка:

$$|f(x,t)| \le \; C_0|x|^{1+\alpha}; (|x| \le R; \; t \ge 0; \qquad C_0, \; \alpha > 0),$$

тогда тривиальное решение задачи Коши (2.24) будет асимптотически устойчивым.

Доказательство. В силу нормальности матрицы $A(t)$ всегда существует [38,85] унитарная подстановка:

$$x = U(t)y;$$

$$(U^*(t)A(t)U(t) = \Lambda_A(t) = diag\{\lambda_1(t), \dots \lambda_n(t)\};\ \ |x(t)| \equiv |y(t)|;\ \ t \geq 0)),$$

позволяющая (с учетом теоремы 2.1) записать дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы решения начальной задачи (2.24):

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re(x^*A(t)x) + Re\big(x^*f(x,t)\big) =$$

$$= Re(y^*U^*(t)A(t)U(t)y) + +C_1|x|^{2+\alpha} \leq\ Re(y^*\Lambda_A(t)y) + C_1|x|^{2+\alpha} \leq$$

$$\leq Re\sum_1^n \lambda_{Aj}(t)\left|y_j\right|^2 + C_1|x|^{2+\alpha} \leq$$

$$\leq (-\sigma_0 + \varphi(t)|y|^2 + C_1|x|^{2+\alpha} \leq (-\sigma_0 + \varphi(t) + C_1|x|^{\alpha})|x|^2 \leq$$

$$\leq \big(-\sigma_1 + \varphi(t)\big)|x|^2; (0 < \sigma_1 < \sigma_0),$$

что приводит к оценке нормы решения:

$|x(t)| \leq |x_0| \exp(-\sigma_1 t + \int \varphi(t)dt) \leq C_2|x_0| \exp(-\sigma_1 t) \to 0$

$(t \to +\infty;\ \ (0 < \sigma_1 < \sigma_0),$

что и доказывает асимптотическую устойчивость тривиального решения задачи Коши (2.23), завершая доказательство теоремы 2.6.

Теорема 2.7. Если для квазилинейной неавтономной системы: $\dot{x} = A(x,t)x + f(x,t);\ \ x(0) = x_0;$ (2.25)

$$(x, f \in R^n;\ \ f(0,t) \equiv 0);\ \ t \geq 0)$$

с нормальной и непрерывной (при $t \geq 0; |x| \leq R$) матрицей $A(x,t)$, её спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ удовлетворит неравенствам:

$Re\lambda_j(x,t) \leq -\sigma_0 |x|^\beta$; $(\sigma_0 > 0;\ t \geq 0;\ \beta \geq 0;\quad |x| \leq R)$ (2.26)

и для достаточно гладкой функции $f(x,t)$ имеет место оценка

$|f(x,t)| \leq \ C_0 |x|^{1+\alpha}$;$(|x| \leq R; t \geq 0;\qquad C_0 > 0,\ \ \alpha \geq \beta \geq 0)$,

тогда тривиальное решение задачи Коши (2.24) будет асимптотически устойчивым.

Доказательство. С учетом нормальности матрицы $A(x,t)$ всегда существует [38,85] в области Ω: $\{|x| \leq R;\ t \geq 0\}$ унитарная подстановка $x = U(x,t)$

$(U^*(x,t)A(x,t)U(x,t) = \Lambda_A(x,t) = diag\{\lambda_1(x,t), \dots \lambda_n(x,t)\}; \qquad |x(t)| \equiv |y(t)|)$,

что позволяет (силу теоремы 2.1) записать дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы решения начальной задачи (2.24):

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re(x^*A(x,t)x) + Re\big(x^*f(x,t)\big) \leq$$

$$\leq Re(y^*U^*(x,t)A(x,t)U(x,t)y) + C_2|x|^{2+\alpha} \leq$$

$$\leq Re(y^*\Lambda_A(x,t)y) + C_2|x|^{2+\alpha} \leq \ Re\sum_1^n \lambda_j(x,t)\left|y_j\right|^2 + C_1|x|^{2+\alpha} \leq$$

$$\leq (-\sigma_0|x|^{2+\beta} + C_2|x|^{2+\alpha} \leq (-\sigma_0 + C_1|x|^{\alpha-\beta})|x|^{2+\beta} \leq$$

$\leq (-\sigma_1)|x|^{2+\beta}, (0 < \sigma_1 < \sigma_0)$.

При этом имеем неравенство:

$\frac{d|x|^2}{|x|^{2+\beta}} \leq -\sigma_1 t$, позволяющее получить оценку $(|x_0| \neq 0)$:

$$|x(t)| \le \frac{1}{\sqrt[\beta]{\frac{1}{|x_0|^\beta}+\sigma_1 t}} \to 0 \qquad (t \to +\infty),$$

что и доказывает асимптотическую устойчивость тривиального решения начальной задачи (2.24), завершая доказательство теоремы (2.7).

Замечание. Метод аналогий при анализе различных модельных задач требует соответствующего обоснования. В противном случае это может привести к ошибочным результатам.

Например, при анализе линейных систем ОДУ:

$$\dot{x} = Ax; \quad x(0) = x_0; \quad (x \in R^n)$$

с постоянной матрицей A наличие у неё спектра $\{\lambda_j\}_1^n$, лежащего в открытой левой полуплоскости $(Re\lambda_j < 0; \;\; j = \overline{1,n})$, гарантирует асимптотическую устойчивость тривиального решения исследования системы.

Но при изучении аналогичной неавтономной линейной системы:

$$\dot{x} = A(t)x; \quad x(0) = x_0; \qquad x \in R^n \tag{2.27}$$

с переменной матрицей $A(t)$ наличие у этой матрицы даже постоянного спектра $\{\lambda_j\}_1^n$ условие $Re\lambda_j < 0$; $(j = \overline{1,n})$ не гарантирует асимптотической устойчивости тривиального решения.

Для иллюстрации последнего утверждения рассмотрим два характерных примера.

Пример 2.8 Тривиальное решение системы:

$$\dot{x} = A(t)x; \;\; x(0) = x_0; \;\; A(t) = \begin{pmatrix} (-1-2cos4t) & (-2+sin4t) \\ (2+2sin4t) & (-1+2cos4t) \end{pmatrix}; \tag{2.28}$$

неустойчиво, что доказано в работе [35, с.123] с помощью метода показателей Ляпунова, хотя спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^2$ матрицы $A(t)$ в данном случае является постоянным, лежит в левой полуплоскости и равен $\lambda_{1,2} = -1$,то есть, в данном случае метод аналогии не работает, так как мы не провели дополнительного обоснования.

Пример 2.9. При анализе подобной линейной неавтономной системы:

$$\dot{x} = A(t)x; \quad A(t) = \begin{pmatrix} (-2-2cos4t) & (-2+sin4t) \\ (2+2sin4t) & (-2+2cos4t) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^2$ матрицы $A(t)$ равен $\lambda_{1,2} = -2$, но в этом случае тривиальное решение системы (2.29) будет асимптотически устойчивым, что следует из теоремы 2.3 с учетом представления матрицы $A(t)$ в виде суммы двух нормальных матриц:

$A(t) = A_{0H} + 2B_{\text{Н}}(t)$, где матрицы

$$A_{0H} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B_{\text{Н}}(t) = \begin{pmatrix} (-cos4t) & (sin4t) \\ (sin4t) & (cos4t) \end{pmatrix},$$

являясь нормальными, имеют спектры $\lambda_{A1,2} = -2 \pm i$ и $\lambda_{B1,2} = -2 \pm 2i$, что позволяет с учетом теоремы 2.1и унитарных подстановок: $x = U_A(t)y$; $x = U_B(t)z$;

$(U^*{}_A A_{0H} U_A = \Lambda_{A0}$; $U^*{}_B(t) B_{\text{Н}}(t) U^*{}_B(t) = \Lambda_B$, $\quad |x(t)| \equiv |y(t)| \equiv |z(t)|)$,

записать дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы решения системы (2.29):

$$\frac{1}{2}\frac{d|x|^2}{dt} = Re(x^* A_{0H} x) + Re(x^* B_{\text{Н}}(t) x) = Re(y^* \Lambda_{A0} y) + Re(z^* \Lambda_B z) =$$

$$= Re \sum_1^2 \lambda_{Aj} |y_j|^2 + Re \sum_1^2 \lambda_{Bj} |z_j|^2 \le -|x|^2,$$

откуда и следует оценка $|x(t)| \le |x_0| \exp(-\mathrm{t}) \to 0; \quad t \to \infty$, что и доказывает асимптотическую устойчивость решения системы (2.29)

Предложенный выше и проанализированный на целом ряде нетривиальных примеров 2.1-2.9 плодотворный симбиоз метода аналогии [77] и метода унитарных преобразований [68, 95] является эффективным не только с точки зрения математика - исследователя, но и весьма полезным с точки зрения математика-преподавателя, то есть с учебно-методической с точки зрения, так как делает более эффективным процесс анализа и вычисления при решении важнейших задач теории устойчивости, а также более наглядными и прозрачными процесс изложения (процесс усвоения слушателями) основных моментов качественной теории дифференциальных уравнении, в частности, основных положений теории устойчивости.

Таким образом, предложенное выше сочетание метода аналогии [77] (при достаточном обосновании) и метода унитарных преобразований [68, 95], является новым достаточно эффективным и конструктивным аппаратом как для научных работников и аспирантов, так и для бакалавров и магистров.

Эффективность и конструктивность разработанного в диссертации подхода, продемонстрировано при исследовании конкретных линейных и нелинейных нетривиальных примеров 2.1-2.9.

Покажем полезность данного метода при исследовании реальной инженерно - физической задачи в теории гироскопов, а именно при анализе модельной системы уравнений, описывающей процесс колебания тонкого кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) с системой поддерживающих торсионов[96], который без учёта демпфирования сводится к исследованию системы ОДУ четвертого порядка вида:

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{8} B(z) z; \quad (2.30)$$

где компоненты вектора $z = (q_1, p_1, q_2, p_2)^T$, медленно изменяющиеся переменные, связанные с формой колебаний, матрица $B(z)$,

$$B(z) = \begin{pmatrix} 0 & -a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & -a \\ 0 & -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

где её компоненты a и b равны соответственно:

$$a = 3\xi\sigma^2; \quad b = 4\nu - \xi x;$$

ξ - параметр, характеризующий нелинейную упругость материала резонатора;

ν –безразмерная угловая скорость основания гироскопа;

$\sigma^2 = {q_1}^2 + {p_1}^2 + {q_2}^2 + {p_2}^2$ и $x = 2(p_2, q_1 - p_1, q_2)$ – функции, представляющие собой первые интегралы исходной системы(2.30).

Так как матрица $B(z)$ является нормальной и кососимметрической $(B^*(z)B(z) \equiv B(z)B^*(z))$ и силу этого имеет чисто мнимый спектр, то процесс колебаний, определяемой системой (2.30)всегда будет устойчивым в силу теорем 2.1-2.5.

Для определения более детальной структуры колебаний, определяемой модельной системой (2.30) следует найти её спектр, что в данном случае является нетривиальной задачей.

Для упрощения дальнейшего анализа представим матрицу $B(z)$ в виде суммы двух нормальных и кососимметрических матриц

$$B(z) = F(z) + G(z),$$

где матрицы, равные:

$$F(z) = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}; G(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

также имеют чисто мнимый спектр

$\lambda_{Fj}(z) = \pm ia$; $\lambda_{Gj}(z) = \pm ib$, что позволяет сделать вывод о том, что структура решения системы (2.30) будет иметь колебательный характер вида:

$$z(t) = c_1 \cos(a+b)\,t + c_2 \sin(a+b)\,t + c_3 \cos(a-b)\,t + c_4 \sin(a-b)\,t,$$

где значения постоянных векторов c_j ($j = \overline{1,4}$) будут определяться начальными условиями.

О возможностях метода аналогии при изложении нового варианта метода расщепления при анализе модельной спектральной задачи теории регулярных возмущений

При изучении линейных систем ОДУ вида $\dot{x} = A(t)x;\ (x \epsilon R^n)$, устойчивость их решения полностью определяется спектром $\{\lambda_j\}_1^n$ матрицы A.

Методы нахождения спектра излагаются в первом семестре в курсе « Линейной алгебры» в ходе решения задач

$As_j = \lambda_j s_j$ и $|A - \lambda E| = 0.$

Для нахождения спектра $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ возмущённой матрицы $A(\varepsilon) = \sum_0^\infty A_k \varepsilon^k$ и собственных векторов $\{s_j(\varepsilon)\}_1^n$ в виде регулярных по ε рядов $\lambda_j(\varepsilon) = \sum_0^\infty \lambda_{kj} \varepsilon^k$ $\{s_j(\varepsilon)\}_1^n = \sum_0^\infty s_{kj} \varepsilon^k$ является весьма громоздким и мало удобным для практических целей (он насчитывает более 200 лет).

В отличие от известных методов [38, 67, 85, 113, 155, 24, 97, 100, 151,] теории регулярных возмущений для решения классической задачи теории регулярных возмущений о нахождении собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$ и собственных векторов $s_j(\varepsilon)$ возмущенной матрицы (возмущенного оператора) $A(\varepsilon)$, сводящего к решению векторного уравнения:

$A(\varepsilon) s_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon) s_j(\varepsilon).$ (2.31)

Для её решения мы применим новый вариант метода расщепления [12].Для анализа этой задачи (2.31) (где в общем случае матричный ряд $A(\varepsilon) = \sum_0^\infty A_k \varepsilon^k$ сходится по некоторой норме при достаточно малых$\varepsilon |\varepsilon| \ll 1$) собственные значения $\lambda_j(0)$ и собственные векторы $s_j(0)$невозмущенной матрицы (невозмущенного оператора $A(0) = A_0$) считаются известными) мы предложим новый математический алгоритм.

Предложенный ниже алгоритм для решения поставленной задачи (2.31) имеет (по сравнению с ранее известным [38, 65, 155, 113, 85]) ряд методических и вычислительных преимуществ, которые будут изложены ниже.

Эта классическая задача (2.31) регулярной теории возмущений имеет большую историю (смотри, например [65, 155, 113, 85]).

Применяемые до последнего времени методы и алгоритмы решения этой задачи, даже в частном случае, когда матрица A_0 имеет простой (некратный спектр)$\{\lambda_{0j}\}_1^n$, удовлетворяющий неравенствам

$$\left(\sigma_{jk} = \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0\,, \qquad j \neq k; \quad j = \overline{1,n}\right),$$

были весьма громоздкими и мало приспособленными для качественного (приближённого) и особенно для более точного численного анализа.

Напомним сущность традиционного метода [38, 65, 155, 113, 85] решения этой задачи (2.31) теории регулярных возмущений в простейшем случае, когда предельный ($\varepsilon = 0$) оператор (матрица) A_0 является самосопряженным.

Это означает, что в терминах введенного скалярного произведения имеет место равенство

$(A_0 x, y) = (x, A_0 y)$ для любых $x, y \in R^n$.

Будем предполагать, что собственные векторы $\{s_{0j}\}_1^n$этого оператора образуют ортонормированныйбазис, для которого имеют место соотношения:

$$(s_{0j,}\, s_{ok}) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1; & j = k; \\ 0; & j \neq k; \end{cases} \qquad (j, k = \overline{1, n};). \ (2.32)$$

Решение задачи (2.31) будем искать в виде регулярных рядов по степеням малого параметра ε:

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_0^\infty \lambda_{kj}\varepsilon^k; \qquad s_j(\varepsilon) = \sum_0^\infty s_{kj}\varepsilon^k; \qquad (j = \overline{1, n}), (2.33)$$

Ограничимся для простоты изложения частным случаем, когда

$$A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_{1.}$$

Для нахождения неизвестных скалярных величин λ_{kj} и векторных коэффициентов s_{kj} $(k \geq 1)$ после подстановки (2.33) в (2.31) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε и получим набор векторных уравнений:

ε^0: $$A_0 s_{0j} = \lambda_{0j} s_{0j}; (2.34)$$

ε^1: $$A_0 s_{1j} + A_1 s_{0j} = \lambda_{0j} s_{1j} + \lambda_{1j} s_{0j} \dots \qquad (2.35)$$

и так далее.

Коэффициенты уравнения (2.34) λ_{0j} и s_{0j} нам известны.

Уравнение (2.35) содержит две неизвестные величины: скалярную λ_{1j} и векторную s_{1j}. В каждом последующем уравнении, имеющем ту же структуру, что и уравнение (2.35), будут появляться две новые неизвестные величины λ_{kj} и s_{kj}.

Умножив уравнение (2.35) скалярно на s_{0j}, получим:

$$(A_0 s_{1j}, s_{0j}) + (A_1 s_{0j}, s_{0j}) = \lambda_{0j}(s_{1j}, s_{0j}) + \lambda_{1j}(s_{0j}, s_{0j}).$$

Это позволяет с учетом условий ортогональности (2.32) можно записать векторное уравнение:

$\lambda_{0j}(s_{1j}, s_{0j}) + (A_1 s_{0j}, s_{0j}) = \lambda_{0j}(s_{1j}, s_{0j}) + \lambda_{1j}$,

откуда в итоге имеем скалярную величину:

$\lambda_{1j} = (A_1 s_{0j}, s_{0j})$; $(j = \overline{1,n})$. (2.36)

Далее, после умножения уравнения (2.35) на вектор s_{0k} получаем другое уравнение:

$$(A_0 s_{1j}, s_{0k}) + (A_1 s_{0j}, s_{0k}) = \lambda_{0j}(s_{1j}, s_{0k}) + \lambda_{1j}(s_{0j}, s_{0k}),$$

которое после преобразования, принимает вид:

$$\lambda_{0k}(s_{1j}, s_{0k}) + (A_1 s_{0j}, s_{0k}) = \lambda_{0j}(s_{0j}, s_{0k}).$$

При этом имеем равенство:

$\sigma_{jk}(s_{1j}, s_{0k}) = (A_1 s_{0j}, s_{0k}) = b_{jk}$.(2.37)

Представив искомый вектор s_{1j} в виде суммы разложения по базису$\{s_{0k}\}_1^n$;

$s_{1j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_{0k}$, (2.38) где скалярные коэффициенты $\alpha_k(k = \overline{1,n})$ подлежат определению, после подстановки (2.38) в (2.37) получаем с учетом условий ортогональности (2.32) соотношения:

$$(s_{1j}, s_{0k}) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_{0k}, s_{0k}) = \alpha_k = b_{jk}\sigma_{jk}^{-1}.$$

Таким образом, однозначно определяются искомые векторыs_{1j}:

$s_{1j} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\sigma_{jk}^{-1} s_{0k}$;$(j = \overline{1,n})$.

Для нахождения последующих приближенней λ_{2j}и s_{2j} потребуется провести ещё более громоздкие вычисления и преобразования , что делает этот алгоритм неудобным, как с методической, так и вычислительной точек зрения.

В последнее время, в 1993г. был предложен [70], более приемлемый и более эффективный алгоритм, для решения спектральной задачи (2.31), применимый для матрицы A_0 произвольной жордановой структуры, когда при наличии кратных точек спектра возникают после введения так называемого «срезающего» преобразования [70] разложения вида (2.33), но уже по дробным степеням малого параметра ε.

Для простоты изложения мы приведем подробные результаты этого нового алгоритма для матрицы A_0 простой структуры (то есть при наличии только некратных точек спектра).

Теорема 2.8. Если матрица A_0 имеет только простые (некратные) точки спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^n$, удовлетворяющие неравенствам:

$$\sigma_{jk} = \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0\,; \qquad (j \neq k; \quad j,k = \overline{1,n}).$$

Тогда собственные значения $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ и собственные векторы $\{s_j(\varepsilon)\}_1^n$ возмущенной матрицы $A(\varepsilon) = \sum_0^\infty A_k \varepsilon^k$ могут быть представлены в виде сходящихся при достаточной малых $|\varepsilon|$<1 степенных рядов :

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{kj}\varepsilon^k \text{и} s_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{kj}\varepsilon^k.$$

Доказательство. Сначала заметим, что равенство (2.32) эквивалентно матричному уравнению:

$A(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)$,(2.39),

где диагональная матрица $\Lambda(\varepsilon) = \sum_0^\infty \Lambda(\varepsilon)\varepsilon^k = diag\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$ состоит из собственных значений $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ матрицы $A(\varepsilon)$, а квадратная матрица $S(\varepsilon) = \{s_1(\varepsilon), \dots, s_n(\varepsilon)\}$ – состоит из собственных векторов столбцов $\{s_j(\varepsilon)\}_1^n$ матрицы $A(\varepsilon)$.

В силу простоты спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^n$невозмущенной матрицы $A(0)$

$$\sigma_{jk} = \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0\,; \qquad (j \neq k; \quad j,k = \overline{1,n}),$$

всегда существует [38, 65, 155, 113, 85] невырожденная матрица S_0 такая, что

$$S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = diag\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}.$$

При этом невырожденная замена $S(\varepsilon) = S_0 H(\varepsilon)$ приводит матричное уравнение (2.39) к более удобному для последующего анализа матричному уравнению:

$$B(\varepsilon)H(\varepsilon) = H(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon); \quad (B(\varepsilon) = S_0^{-1} A_0 S_0 = \textstyle\sum_0^\infty B_k \varepsilon^k; \quad B_0 = \Lambda_0). \; (2.40)$$

Следуя методу расщепления [70] для произвольной квадратной матрицы

$A = \{a_{jk}\}_1^n$ введем специальные обозначения для её «диагональной» части $\bar{A} = diag\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ и «бездиагональной» части $\bar{\bar{A}} = A - \bar{A}$.

Решение матричного уравнения (2.40) будем искать в виде:

$$\Lambda(\varepsilon) = \textstyle\sum_0^\infty \Lambda_k \varepsilon^k = diag\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}; \quad H(\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^\infty \bar{\bar{H}}_k \varepsilon^k. \; (2.41)$$

С учетом метода расщепления [12] изложим достаточно простой и конструктивной алгоритм для последовательного и однозначного определения всех «диагональных» Λ_k и бездиагональных $\bar{\bar{H}}_k$ матриц $(k \geq 1)$.

Действительно, после подстановки матричных сумм (2.41) в уравнение в (2.40) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При этом получим набор однотипных однозначно разрешимых матричных уравнений:

$$\varepsilon^1 : \Lambda_0 \bar{\bar{H}}_1 - \bar{\bar{H}}_1 \Lambda_0 = \Lambda_1 - B_1;$$

$$\varepsilon^2 : \Lambda_0 \bar{\bar{H}}_2 - \bar{\bar{H}}_2 \Lambda_0 = \Lambda_2 - P_2;$$

$$(P_2 = B_2 + B_1\bar{\bar{H}}_1 + \bar{\bar{H}}_1\Lambda_1);$$

……………………………………..

ε^k: $\Lambda_0\bar{\bar{H}}_k - \bar{\bar{H}}_k\Lambda_0 = \Lambda_k - P_k$; (2.42)

$$(P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k=1} B_j\,\bar{\bar{H}}_{k-j} + \bar{\bar{H}}_{k-j}\Lambda_j); k \geq 1.$$

Все полученные матричные уравнения имеют структуру уравнения вида (2.42) и содержит две неизвестные матрицы, а именно «бездиагональную» $\bar{\bar{H}}_k$ матрицу и «диагональную» матрицу Λ_k , которые однозначно определяются по следующему конструктивномуалгоритму:

$\Lambda_k = \bar{P}_k$; $P_k = \{p_{ijk}\}$; $\bar{\bar{H}}_k = \{h_{ijk}\}$; (2.43)

$$h_{ijk} = -\sigma_{ij}^{-1}p_{ijk};\ \ (k \geq 1;\ \ i \neq j;\ \ i,j = \overline{1,n}).$$

Докажем теперь сходимость формально построенных матричных рядов вида (2.41).

Как известно [85, с.220]сходимость формального ряда $\Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k\varepsilon^k$ при достаточно малых $|\varepsilon|<1$ следует из сходимости исходного ряда $A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\varepsilon^k$ и алгебраической теории функций.

Для доказательства сходимости построенного матричного ряда $H(\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\bar{H}}_k\varepsilon$ (то есть и ряда $S(\varepsilon) = S_0H(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k\varepsilon^k$) перепишем уравнение (2.41) в виде

$$(\Lambda_0 + R(\varepsilon)\left(E + \bar{\bar{H}}(\varepsilon)\right) = \left(E + \bar{\bar{H}}(\varepsilon)\right)(\Lambda_0 + \bar{N}(\varepsilon)),$$

или в операторной форме:

$(L_0 + L_1(\varepsilon))\bar{\bar{H}}(\varepsilon) = \bar{N}(\varepsilon) - R(\varepsilon)$,(2.44)

где операторы L_0и $L_1(\varepsilon)$определяются формулами:

$$L_0\overline{\overline{H}} \equiv \Lambda_0\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}\Lambda_0; L_1(\varepsilon))\overline{\overline{H}} \equiv R(\varepsilon)\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}\overline{N}(\varepsilon);$$

$(R(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\varepsilon^k; \overline{N}(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\varepsilon^k;\quad \overline{\overline{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\overline{H}}_k\varepsilon^k)$.

Следует также отметить, что операторы L_0и$L_1(\varepsilon)$ действуют в пространстве бездиагональных матриц $\{\overline{\overline{H}}\}$.

В силу обратимости оператора L_0 (а это следует из того, что уравнение $L_0\overline{\overline{H}} = 0$имеет в этом пространстве только тривиальное нулевое решение) сразу следует, что расширенный оператор $(L_0 + L_1(\varepsilon))$ также обратим в этом пространстве $\{\overline{\overline{H}}\}$ при достаточно малых$\varepsilon(|\varepsilon| < 1)$.

Из этого утверждения вытекает сходимость и обратимость матричных рядов $H(\varepsilon) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\overline{H}}_k\,\varepsilon$ и $S(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k\varepsilon^k$ при достаточно малых $\varepsilon($ $|\varepsilon| < 1)$.

Теорема 2.8 доказана.

Новый алгоритм нахождения собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$ и собственных векторов $s_j(\varepsilon)$ возмущенной матрицы $A(\varepsilon)$, как примера классической задачи теории регулярных возмущений [70] , является в отличие от ранее известного [38, 65, 155, 113, 85] , существенно более удобным, в частности, для преподавания (изложения) этого метода на физико-математических и инженерных факультетах, также как и в процессе научных исследований самого различного уровня.

Предложенный новый алгоритм регулярной теории возмущений, используемый при изучении большого класса естественных, в частности, физических процессов, при наличии регулярных возмущений, что очень важно не только с утилитарной точки зрения при создании оптимального алгоритма исследования для получения необходимых качественных и более точных численных результатов , но и с методической точки зрении при построении качественного и эффективного учебного процесса для подготовки нового поколения инженеров- исследователей, способных на современном уровне решать текущие производственные проблемы и быть готовыми к решению различных и качественно новых научно -технических задач.

При этом выбор наиболее оптимальной математической модели (наиболее соответствующей данному объекту или процессу) и выбор достаточно современного и обоснованного математического аппарата, применимого для изучения данного и других процессов или объектов является важнейший задачей, как в процессе исследования, так и в процессе обучения.

Для демонстрации изложенного выше метода решения спектральных задач теории регулярных возмущений воспользуемся изложенным выше (теорема 2.8) новым вариантом метода расщепления, используя универсальные возможности метода аналогий и нового варианта метода расщепления [70].

С новой точки зрения рассмотрим подробнее процесс колебаний анизотропного резонатора ВТГ [96], который может быть описан модельной системой двух однородных дифференциальных векторных уравнений второго порядка:

$\ddot{f} + A(\varepsilon)f = 0; \ddot{g} + B(\varepsilon)g = 0;$(2.45)

$(f, g \in R^5; \quad A(\varepsilon) = \sum_0^4 A_k\varepsilon^k; B(\varepsilon) = \sum_0^4 B_k\varepsilon^k),$

где$A_j = B_j (j = \overline{1,4})$известные матрицы, равные:

$$A_0 = B_0 = \Lambda_0 = diag\{\omega_{02}^2, \dots, \omega_{06}^2\};$$

$$A_1 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = B_2 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & b_4 & 0 \\ b_2 & 0 & b_5 & 0 & b_6 \\ 0 & b_4 & 0 & b_7 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & b_9 \end{pmatrix}; A_3 = B_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & c_4 \\ 0 & c_3 & 0 & c_5 & 0 \\ c_2 & 0 & c_5 & 0 & c_6 \\ 0 & c_4 & 0 & c_6 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & d_1 & 0 & d_3 \\ 0 & d_4 & 0 & d_5 & 0 \\ d_2 & 0 & d_6 & 0 & d_7 \\ 0 & d_5 & 0 & d_8 & 0 \\ d_3 & 0 & d_7 & 0 & d_9 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & d_2 & 0 & d_3 \\ 0 & d_4 & 0 & d_5 & 0 \\ d_2 & 0 & d_6 & 0 & d_7 \\ 0 & d_5 & 0 & d_8 & 0 \\ d_3 & 0 & d_7 & 0 & d_9 \end{pmatrix}$$

– и покажем, что их решение отражает наличие суперпозиции двух бегущих в разные направления волн с частотами $\omega_{kf}(\varepsilon)$ и $\omega_{k\mathrm{g}}(\varepsilon)$, подлежащих определению, приводя к появлению стоячих волн.

Следуя изложенному выше методу расщепления, проведём вычисление спектров$\lambda_{Aj}(\varepsilon) = \omega_{kj}^2(\varepsilon)$ и $\lambda_{Bj}(\varepsilon) = \omega_{kg}^2(\varepsilon)$матриц $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$по новому алгоритму, чтобы найти разность частот $\varDelta\omega_k = \omega_{kf} - \omega_{kg}$

Хотя, поставленная проблема (2.45) относится к классу динамических задач, но с учётом больших возможностей метода аналогий, для решения этой динамической задачи (2, 4,5) применим для её исследования метод расщепления, оказавшийся весьма эффективным при анализе статической спектральной задачи вида $A(\varepsilon)s_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon)s_j(\varepsilon)$.

Использование изложенного выше метода аналогий и метода расщепления (с учётом теоремы 2.7) для заданных конкретных матриц $A(\varepsilon)$и $B(\varepsilon)$ в задаче (2.45) с известными матрицами A_j и B_jпозволяет решить эту задачу и найти расщепление частот

$\varDelta\omega_k = \omega_{kf} - \omega_{kg} = \varepsilon^4\delta = \varepsilon^k(d_1 - f_1),$

которое приводит к появлению стоячей волны в структуре колебаний исследуемого резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ).

Математические и методологические особенности метода аналогий и спектрального обобщения теоремы Флоке-Ляпунова при анализе регулярно возмущенных Т-периодических линейных систем ОДУ.

При изучении большого класса конкретных и инженерно физических динамических задач приходится изучать их математические модельные аналоги, сводящиеся к анализу неавтономных линейных системы ОДУ с Т-периодической матрицей вида:

$\dot{x} = A(t)x.$ (2.46)

Исследование таких систем с Т-периодического матрицей является, как известно [54, 95, 65, 124], весьма непростой задачей.

Следует отметить, что известная теорема Флоке- Ляпунова[55] о приводимости таких систем (2.46) с помощью невырожденнойТ-периодической замены

$x = Q(t)y$ (2.47)

к системам с постоянной матрицей вида$\dot{y} = Cy$

не решает данной проблемы, так как не предлагает какого – либо конструктивного алгоритма для построения нужнойТ-периодической невырожденной замены вида (2.47).

К решению задачи об исследовании Т-периодических систем вида (2.46) можно, используя возможности метода аналогий, предложить другой алгоритм.

Воспользуемся тем, что любая Т-периодическая матрица $A(t)$ имеет среднее значение, равное

$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} A(t)dt.$

В этом случае при наличии не слишком больших амплитуд (что имеет место при анализе многих реальных физических, биологических и социальных периодических процессов) любая периодическая достаточно гладкая Т-периодической матриц $A(t)$ может быть представлена в виде

$A(t) = A_0 + \varepsilon A_1(t)$,

или в более общем случае в виде бесконечного сходящегося при достаточно малых ε ($|\varepsilon| < 1$) матричного ряда:

$A(t,\varepsilon) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$, (2.48)

где ε −некоторый малый параметр,

При такой постановке задача (2.46) может быть записана в виде:

$\dot{x} = A(t,\varepsilon); x(0,\varepsilon) = x_0;(x \in R^n)$,(2.49)

а матричный ряд (2.48) из достаточно гладких Т-периодических матриц $A_k(t)(k \geq 1)$ сходится на некоторой норме абсолютно и равномерно при достаточно малых$\varepsilon(|\varepsilon| < 1)$ при $\forall t \geq 0$.

Для таких систем(2.49) (при различных предположениях относительно структуры матрицы A_0) с помощью метода аналогий [77] при использовании аппарата метода расщепления [70] может быть сформулирован и доказан асимптотический и конструктивный аналог [151] теоремы Флоке- Ляпунова, известной уже более ста лет [55].

Теорема 2.9. В случае, если неавтономная регулярно возмущенная система

$\dot{x} = A(t,\varepsilon); x(0,\varepsilon) = x_0(x \in R^n)$ (2.50),

где матричной ряд $A(t,\varepsilon) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k$ из достаточно гладкихТ-периодических матриц сходится абсолютно и равномерно к некоторой норме при достаточно мал $\varepsilon|\varepsilon| < 1$ и при $t \geq 0$ и спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ постоянной матрицы A_0 простой структуры удовлетворяет неравенствам:

$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i\frac{2\pi q}{T}(i,j = \overline{1,n};\ i \neq j;\ q = 0, \pm 1, \pm 2)$, (2.51)

данная система(2.50)может быть с помощью невырожденной при достаточно малых$\varepsilon(|\varepsilon| < 1$)Т-периодической замены

$$x = S_0 H_{(N)}(t,\varepsilon)z; \qquad (H_{(N)}(t,\varepsilon) = E + \sum_1^N H_k(t)\varepsilon^k),$$

(где невырожденная матрица S_0, такая, что $S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda_0 = diag\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}$ всегда существует [38,85]) приводима к более простой системе с почти постоянной и диагональной матрицей вида:

$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z;\ z(0,\varepsilon) = z_0$;(2.52)

$$(Q(t,\varepsilon) = \Lambda_{(N)}(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G_{(N+1)}(t,\varepsilon);$$

$\Lambda_{(N)}(\varepsilon) = \sum_1^N \Lambda_k(\varepsilon);\ \left\|G_{(N+1)}(t,\varepsilon)\right\| \le C)$.

При этом постоянные и диагональные матрицы Λ_k иТ-периодические матрицы $H_k(t)$ однозначно определяются с помощью конструктивного итерационного алгоритма, а оценка $\left\|G_{(N+1)}(t,\varepsilon)\right\| \le C$ следует из прямого вычисления.

Доказательство. После невырожденной замены $x = S_0y$ (которая всегда существует [38,85]) в условиях(2.51) теоремы 2. 9 получим систему вида:

$$\dot{y} = B(t,\varepsilon)y;\ y(0,\varepsilon) = y_{0;}$$

$$\left(B(t,\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_1^{\infty} B_k\,(t)\varepsilon^k\right),$$

где матричной ряд из достаточно гладкихТ-периодических матриц
$B_k(t) = S_0^{-1}A_k(t)S_0$сходится (как и ряд $A(t,\varepsilon)$) абсолютно и равномерно при достаточно малых ε ($|\varepsilon| < 1$) и при любом $t \ge 0$.

После ещё одного невырожденного, при достаточно малых ε, ($|\varepsilon|$ преобразования $y = H_{(N)}(t,\varepsilon)z$, получим необходимый результат (2.52). В случае, если известная матрица $B(t,\varepsilon)$ и неизвестные матрицы $H_{(N)}(t,\varepsilon)$ и $Q(t,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальному матричному уравнению:

$\dot{H}_{(N)} = B(t,\varepsilon)H_{(N)}(t,\varepsilon) - H_{(N)}(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)$.(2.53)

Это утверждение следует из прямой подстановки выражения $y = H_{(N)}(t,\varepsilon)z$ в матричное уравнение (2.52).

Действительно, при этом (с учётом того, что $\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z$) получим соотношение:

$$\dot{y} = \dot{H}_{(N)}(t,\varepsilon)z + H_{(N)}(t,\varepsilon)\dot{z} = \dot{H}_{(N)}(t,\varepsilon)z + H_{(N)}(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)z =$$

$= \quad B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)z,$что и доказывает справедливость появление уравнения (2.53).

Далее, приравнивая в (2.53) матричные коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим дифференциальные матричные уравнения, которые имеют одинаковую структуру:

$$\varepsilon^1: \dot{H}_1 = B_1(t) - \Lambda_1 + \Lambda_0\bar{\bar{H}}_1(t) - \bar{\bar{H}}_1(t)\Lambda_0;$$

$$\varepsilon^2: \dot{H}_2 = P_2(t) - \Lambda_2 + \Lambda_0\bar{\bar{H}}_2(t) - \bar{\bar{H}}_2(t)\Lambda_0;$$

$$(P_2(t) = B_2(t) + B_1(t)H_1(t) - H_1(t)\Lambda_1(t);$$

……………………………………..

$\varepsilon^k: \dot{H}_k = P_k(t) - \Lambda_k + \Lambda_0\bar{\bar{H}}_k(t) - \bar{\bar{H}}_k(t)\Lambda_0$; (2.54)

$$(P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k=1}(B_j(t)\,H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\Lambda_j).$$

Следует отметить, что в каждом из матричных уравнений вида(2.54) можно выделить «диагональное» дифференциальное матричное уравнение:

$\dot{\bar{H}}_k(t) = \bar{P}_k(t) - \ \Lambda_k$(2.55)

и «бездиагональное» дифференциальное матричное уравнение:

$\dot{\bar{\bar{H}}}_k(t) = \bar{\bar{P}}_k(t) + \Lambda_0\bar{\bar{H}}_k(t) - \bar{\bar{H}}_k(t)\Lambda_0$.(2.56)

Матричное уравнение(2.55)всегда имеет Т-периодическое решение вида:

$$H_k(t) = \int_0^t (\bar{P}_k(t) - \ \Lambda_k)\,dt$$

где неизвестная матрица Λ_k должна быть равнасреднему значениюот матрицы$P(t)$, то есть представима в виде:

$$\Lambda_k = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{P}\,(s)ds.$$

Для анализа более сложного уравнения (2.56) отметим, что оно распадается на $(n^2 - n)$скалярных дифференциальных уравнений первого порядка (с учётом представления $\bar{\bar{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}, \bar{\bar{P}}_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}$) вида:

$\dot{h}_{ijk} = \sigma_{ij} h_{ijk}(t) + p_{ijk}(t)$ (2.57)

В монографии [24] доказано, в условиях (2.51) теоремы 2.8 это что уравнение (2.57) имеет единственное Т-периодическое решение, представимое в виде:

$$h_{ijk}(t) = e^{\sigma_{ij(t+T)}}(1 - e^{\sigma_{ijT}})^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\sigma_{ijs}}\, p_{ijk}(s) ds,$$

что и завершает доказательство теоремы 2.8.

Замечание. Последнее утверждение можно считать с одной стороны асимптотическим аналогом теоремы Флоке- Ляпунова[55], а с другой стороны изложенный в ней алгоритм является новым спектральным вариантом известного метода усреднения [47].

При наличии в дифференциальном матричном уравнении (2.50) у матрицы A_0 кратного спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^p (1 \le p < n)$ и полупростой структуры, матрица A_0 подобна «блочно диагональной» матрице

$A_0 \sim \Lambda_0$;($\Lambda_0 = diag\{\Lambda_{01}, \dots, \Lambda_{0p}\}$; $\Lambda_{0j} = \lambda_{0j} E$; $j = \overline{1,p}, 1 \le p < n$),

тогда имеет место другое утверждение.

Для удобства последующего изложения, следуя методу расщепления [70], для произвольной квадратной матрицы $A = \{a_{jk}\}_1^n = \{A_{jk}\}_1^p$ при её блочном расщеплении введём специальные обозначения для её «блочно диагональной» части $\hat{A} = diag\{A_{11}, \dots, A_{1p}\}$ и «блочнобездиагональной» части$\hat{\hat{A}} = A - \hat{A}$.

Тогда имеет место другое утверждение [71].

Теорема 2.10. Неавтономное дифференциальное матричное уравнение вида:

$\dot{x} = A(t, \varepsilon); x(0, \varepsilon) = x_0 (x \in R^n)$ (2.58),

где матричный ряд $A(t, \varepsilon) = A_0 + \sum_1^\infty A_k(t) \varepsilon^k$ из достаточно гладких Т-периодических матриц сходится абсолютно и равномерно, по некоторой норме при достаточно малой $\varepsilon |\varepsilon| < 1$ и при $t \ge 0$)

при наличии у матрицы A_0 кратного спектра и полупростой структуры, в случае, если её спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ удовлетворяет условиям:

$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i\frac{2\pi q}{T}(i,j = \overline{1,p};\ \ i \neq j;\ q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (2.59)

может быть с помощью невырожденного Т-периодического преобразования вида:

$x = S_0 H_{(N)}(t,\varepsilon)z;\ \ (H_{(N)}(t,\varepsilon) = E + \sum_1^N H_k\,(t)\varepsilon^k)$

$S_0^{-1}A_0 S_0 = \Lambda_0 = diag\{\Lambda_{01}, \dots, \Lambda_{0p}\}(\Lambda_{0j} = \lambda_{0j}E;\ \ j = \overline{1,p;}\, 1 \leq p < n\,)$

преобразована к дифференциальному матричному уравнению с почти постоянной « блочно-диагональной» матрицей вида:

$$\dot{z} = Q(t,\varepsilon)z;\ z(0,\varepsilon) = z_0;$$

$(Q(t,\varepsilon) = \hat{F}_{(N)}(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G_{(N+1)}(t,\varepsilon);$ (2.60)

$\hat{F}_{(N)}(\varepsilon) = \ \Lambda_0 + \sum_1^N \hat{F}_{(N)}(\varepsilon);\ \|G_{(N+1)}(t,\varepsilon)\| \leq C);$

где постоянные «блочно - диагональные» матрицы $\hat{F}_{(k)}$ и Т-периодическое матрицы $H_k(t)$ однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма, а оценка $\|G_{(N+1)}(t,\varepsilon)\| \leq C$ проверяется прямым вычислением.

Доказательство. Аналогично предыдущему после замены $x = S_0 y$ можно получить дифференциальное уравнение вида:

$\dot{y} = B(t,\varepsilon)y; y(0,\varepsilon) = y_0;$

$B(t,\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_1^\infty B_k\,(t)\varepsilon^k$ (2.61).

Далее после невырожденного при достаточно малых $|\varepsilon| < 1$. преобразованиях $y = H_{(N)}(t,\varepsilon)z$ получим необходимый результат (2.60), если матрицы $B(t,\varepsilon), Q(t,\varepsilon)$ и $H_{(N)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальному матричному уравнению:

$\dot{H}_{(N)} = B(t,\varepsilon)H_{(N)}(t,\varepsilon) - H_{(N)}(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon)$.(2.60)

Приравнивая в (2.60) матричные коэффициенты при одинаковых степенях ε получим однотипные дифференциальные матричные уравнения:

$\varepsilon^k\!: \dot{H}_k = P_k(t) - \hat{F}_k + \Lambda_0\hat{\hat{H}}_k(t) - \hat{\hat{H}}_k(t)\Lambda_0, ;\ k = \overline{1,N;}$(2.61)

$$P_1(t) = B_1(t);$$

$$P_k(t) = B_k + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j(t)\, H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t)\hat{F}_k) = \overline{2, N}.$$

В условиях теоремы 2.9 каждое из уравнений(2.61) разлагается на, «блочно диагональное» матричное уравнение вида:

$\dot{\hat{H}}_k = \hat{P}_k(t) - F_k k = \overline{1, N};$(2.62)

и «блочно–бездиагональное» матричное уравнение:

$\dot{\hat{\hat{H}}}_k = \Lambda_0 \hat{\hat{H}}_k(t) - \hat{\hat{H}}_k(t)\Lambda_0 + \hat{\hat{P}}_k(t),$

которое (в свою очередь распадается с учётом

$\hat{\hat{H}}_k(t) = \{t_{ijk}(t)\}$; $\hat{\hat{P}}_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}$) на ($p^2 - p$) дифференциальных матричных уравнений вида:

$\dot{H}_{ijk}(t) = \sigma_{ij} H_{ijk}(t) + P_{ijk}(t);$ $(i, j = \overline{1, p};\ \ i \neq jk = \overline{1, N}),$

что далее позволяет перейти к соответствующим скалярным дифференциальным уравнениям первого порядка вида (опуская часть индексов):

$\dot{h} = \sigma_{ij} h(t) + p(t),$

каждое из которых в условиях теоремы 2.9 имеет с учётом [24 с, 361] единственноеТ-периодическое решение в вида:

$$h(t) = e^{\sigma_{ij(t+T)}} (1 - e^{\sigma_{ij.T}})^{-1}. \int_t^{t+T} e^{-\sigma_{ij} s}\, p_{ijk}(s) ds,$$

и каждое из «блочно-диагональных» матричных уравнении вид (2.62) также имеет Т-периодическое решение вида:

$$\hat{H}_k(t) = \int_0^t (\hat{P}_k(s) - \hat{F}_k) ds,$$

если «блочно-диагональная» матрица $\hat{F}_k$ равнасреднему значениюТ-периодической матрицы $\hat{P}_k(t)$, то есть равна:

$$\hat{F}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{P}_k\,(t) dt$$

Теорема 2.10 доказана.

Дальнейшее исследование и расщепление системы вида (2.58)может иметь место при анализе любой из подсистем вида:

$\dot{z}_j = (\lambda_{oj}E + \sum_{k=1}^{N} F_{jk}\varepsilon^k + \underline{\underline{O}}\,(\varepsilon^{N+1}))z_j z_j(0,\varepsilon) = z_0$,(2.65)

в зависимости от структуры спектра каждой из матриц F_{j1}

Замечание

1. Если каждая из матриц F_{j1} в уравнении вида (2.64) имеет простую или полупростую структуру, тогда следует воспользоваться аналогами теоремы 2.8 или теоремы 2.9, чтобы произвести дальнейшее«расщепление» указанных подсистем вида (2.64),
2. В случае, если матрицаF_{j1} имеет более сложную жорданову структуру при наличии у неё кратного спектра, тогда следует воспользоваться так называемым «срезающим» преобразованием с введением некоторых дробных степеней малого параметра ε[70].

Исследование данного случая, когда матриц F_{jk} имеет более сложную жорданову структуру выходит за рамки представленной работы.

Теорема 2.11. Для задачи Коши, поставленной для неавтономного дифференциального матричного уравнения (2.50), при выполнении условийтеоремы2.8, если спектр $\{\lambda_{0j}(\varepsilon)\}_1^n$ вспомогательной матрицы$\Lambda_{(N)}(\varepsilon)$удовлетворяет неравенствам:

$R_e\lambda_j(\varepsilon) \le -\sigma_0\varepsilon^k$;$(j = \overline{1,n}; q = \overline{0,N})$,(2.65)

тогда тривиальное решение системы (2.52) и эквивалентной системы (2.50) будет асимптотически устойчивым.

Доказательство. Воспользуемся результатами Теоремы 2.1 и запишем дифференциальное неравенство для квадрата евклидовой нормы системы (2.52):

$$\frac{d|z|^2}{dt} = 2Re(z^*\Lambda_{(N)}(\varepsilon)z) + \varepsilon^{N+1}2Re\big(z^*G_{(N+1)}(t,\varepsilon)z\big) \le$$

$$\le 2\,Re\sum_1^n \lambda_j(\varepsilon)\left|z_j\right|^2 + \varepsilon^{N+1}C_1|z|^2 \le$$

$\leq (-2\sigma_0\varepsilon^q + \varepsilon^{N+1}C_1)|z|^2 \leq (-2\sigma_1\varepsilon^q)|z|^2; (0 < \sigma_1 < \sigma_0).$

что приводит к оценке: $|z(t)|^2 \leq |z_0| \exp(-\sigma_1\varepsilon^q) \to 0,\ (t \to +\infty),$ гарантируя асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (2.52) и эквивалентной системы (2.50)

Конструктивное сочетание метода аналогий [67] с методом унитарных преобразований [68, 95] позволило изучить (не претендуя на универсальность) важный класс модельных квазилинейных систем ОДУ с нелинейной нормальной матрицей и исследовать целый ряд физических и биологических процессов, изучение которых сводится к анализу устойчивости решений соответствующих модельных систем ОДУ.

Получены достаточные условия устойчивости соответствующих точек покоя таких квазилинейных систем (включая и критические случаи), что позволяет проводить исследование исследуемых систем без использования традиционного аппарата функций Ляпунова. Для решения классической задач теории регулярных возмущений A(ε)s_j(ε)=λ_j(ε) s_j(ε)построена новая математическая модель, сводящая исследование к анализу возмущенного матричного уравнения вида (2.37) A(ε)S(ε)=S(ε)Λ(ε).

Метод аналогии в сочетании с новым вариантом метода расщеплении [70] позволил также изучить целый класс спектральных статических и динамических задач, связанных, частности, с исследованием модельного уравнения колебаний волнового твердотельного гироскопов (ВТГ).

При анализе модельных неавтономных линейных и квазилинейной систем ОДУ с периодической матрицей, при наличии регулярных возмущений, с помощью метода аналогий [96] и метода расщепления [71] сформулированы и доказаны теоремы о приводимости указанных систем к более простым системам с почти диагональной матрицей.

Полученные результаты можно считать аналогом известной теоремы Флоке- Ляпунова, а также (при анализе квазилинейных систем) обобщением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению.

Учебные материалы, представленные в диссертации, были использованы для проведения спецкурса цель, которого сформировать и развить у студентов навыки применения методологии и методов математического моделирования с использованием математического аппарата, а также вычислительной техники к прикладным инженерным задачам; (Программы спецкурсов см. в приложении 1,2). Первый курс рассчитан на 144 часа и проводится в течение одного семестра. Второй курс проводится два семестра и всего по курсу – 331 час. Доля самостоятельной работы составляет 50 %. Отличие второго курса от первого состоит в том, что в нем имеют место лабораторные работы, выполняемые с помощью компьютерных технологий.

Задание и примеры для самостоятельной работы.

ПРОЕКТ: Исследование устойчивости (методом обоснованной аналогии) квазилинейных систем ОДУ (в критических случаях), матрицы, которых сводимы к нормальной матрице или к сумме нормальных матриц, с учётом метода унитарных преобразований.

Поэтапный план решения поставленной задачи:

1. Сведение исходной задачи к матричной форме в виде квазилинейной системы ОДУ с нелинейной матрицы.
2. Преобразование полученной системы к системе ОДУ, матрица которой представима в виде нормальной матрицы, или в виде суммы нормальных матриц.
3. Нахождение нелинейного спектра полученных нормальных матриц.
4. Применение метода унитарных преобразований и доказанных в работе теорем для обоснования асимптотической устойчивости, или устойчивости решения исследуемой системы.
5. Для закрепления изложенного материала в качестве контрольной работы можно предложить примеры 2.5, 2.6, 2.7.

Для оценки действий, которые должны выполнять студенты по достижению соответствующих учебных целей, спроектирована система мониторинга, математическая модель которой дает количественные показатели уровня сформированности у студентов математических компетенций. Из анализа опыта обучения математике в системе высшего профессионального образования следует, что большинство преподавателей вуза используют традиционные формы контроля и диагностики. В образовательных технологиях необходим переход к стандартизированным формам контроля, основанным на программно-дидактических тестовых материалах. В образовательном процессе по бально-рейтинговым технологиям оценка сформированности компетенций студентов осуществляется на основе многоуровневого компьютерного тестирования.

Любой тест состоит из набора стандартизированных заданий. Оценочная система предполагает наличие следующих критериев:

• быть носителем действий, адекватных содержанию обучения (например, математике);

• быть способом организации и управления учебно-познавательной деятельностью.

В системе мониторинга в учебной деятельности выделяют ряд задач:

• активное включение студентов в учебный процесс посредством информационных технологий;

• эффективное управление обучением, позволяющее оценивать достигнутый и потенциальный уровень обучаемых;

• контроль (корректирующий, констатирующий, самоконтроль) самостоятельной работы студентов;

• диагностика сформированных компетенций, как у отдельных студентов, так и в группе (потоке) в целом;

• мониторинг результатов обучения с минимальными временными и материальными затратами.

Для закрепления изложенного материала в качестве контрольной работы можно предложить примеры 2.5, 2.6, 2.7.

Создан банк задач по математическому моделированию, раскрывающий методологические и функциональные основы метода аналогий в обучении математике студентов технических вузов, при изучении некоторых классов нелинейных физических и биологических модельных задач.

Задачи подобраны по темам:

- задачи устойчивости большого класса модельных систем ОДУ;
- физические задачи теории гироскопов при анализе модельной системы уравнений, описывающей процесс колебания тонкого кольцевого резонатора волнового твердого гироскопа (ВТГ);
- модельные спектральные задачи теории регулярных возмущений;
- задачи об исследовании Т- периодических систем, сводящихся к анализу неавтономных линейных систем ОДУ с Т – периодической матрицей.

Всего представлено 14 задач для решения и исследования, освоено для доказательства и исследования 11 теорем, позволяющих ознакомить, закрепить и применить современные математические методы .

2.3 Описание и результаты педагогического эксперимента

Опытно-экспериментальная работа проводилась в течение 2 лет (2011-2013) базой проведения исследования являлись инженерный факультет Российского университета дружбы народов бакалавры и магистры по кафедре строительные конструкции и сооружения. Задачей экспериментальной работы являлась проверка выдвинутой гипотезы. Экспериментальное обучение проводилось в соответствии с учебными планами высших профессиональных учебных заведений, которые разработаются на основе ФГОС ВПО третьего поколения. Экспериментальная работа включала в себя три взаимосвязанных этапа: констатирующий, поисковый, обучающий. На этапе *констатирующего эксперимента* конкретизировались и эмпирически обосновывались основные задачи целенаправленного формирования исследовательской деятельности студентов в процессе их математической подготовки в техническом вузе. На данном этапе была выделена структура исследовательской деятельности, разработаны уровни ее сформированности, определены содержание и средства обучения на примере курса «Математического моделирования и однородных дифференциальных уравнений», способствующие формированию и развитию исследовательской деятельности студентов технического вуза. В ходе констатирующего этапа эксперимента было установлено, что эпизодическое внесение дополнений в содержание обучения и/или использование методов и форм, привносящих исследовательскую активность студентов, в организацию процесса изучения курса математики не позволяет создать благоприятных условий, способствующих повышению уровня сформированности исследовательской деятельности студентов технического вуза. На *поисковом* этапе эксперимента была разработана методика обучения математике, на основе наглядного моделирования, как средства интеграции математических и методологических знаний в процессе изучения спецкурса «Математического моделирования и однородных дифференциальных уравнений». На третьем этапе исследования – обучающем эксперименте была организована проверка эффективности методики обучения математике, способствующая формированию и развитию исследовательской деятельности студентов. В качестве основных показателей мы выделили: 1) уровень математической компетенции студентов; 2) уровень сформированности исследовательских действий. В эксперименте принимали участие две группы: экспериментальная – ЭГ, общей численностью 48 студентов первого курса магистратуры по направлению подготовки строительные конструкции и сооружения и контрольные группы – КГ в общем составе 48 человек того же курса.

Результаты входного тестирования по математике по первому критерию на начало эксперимента представлены в таблице 1 и на рис. 1.1:

Таблица 1

Результаты контрольной и экспериментальной групп на двух этапах эксперимента по сформированности первого критерия

Группы		Уровни сформированности МК			Количество студентов
		Низкий	Средний	Высокий	
ЭГ	НЭ	14	29	5	48
	КЭ	3	33	12	48
КГ	НЭ	15	27	6	48
	КЭ	10	30	8	48

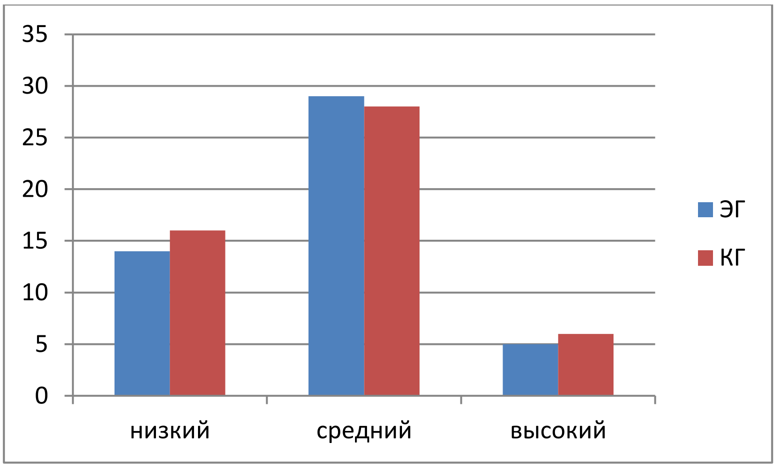


рис. 1.1: *Уровень математической компетентности на начальном этапе*

Итоги диагностической работы показали, что уровень математической компетентности в этих группах приблизительно одинаков : высокий уровень в контрольной группе - 12% , в экспериментальной –10,4%; средний уровень в контрольной группе - 56% , в экспериментальной -60,4%; низкий уровень знаний в контрольной группе - 32%, в экспериментальной - 29,1%.

На этом этапе сравнительный анализ каждой пары контрольной и экспериментальной групп студентов показал, что в контрольных группах и в экспериментальных группах уровень математической компетентности не различается.

На обучающем этапе предстояло сравнить результаты последнего среза (таблица 3) с результатами входного тестирования. Результаты тестирования по математике на конец эксперимента представлены на рис. 1.2:

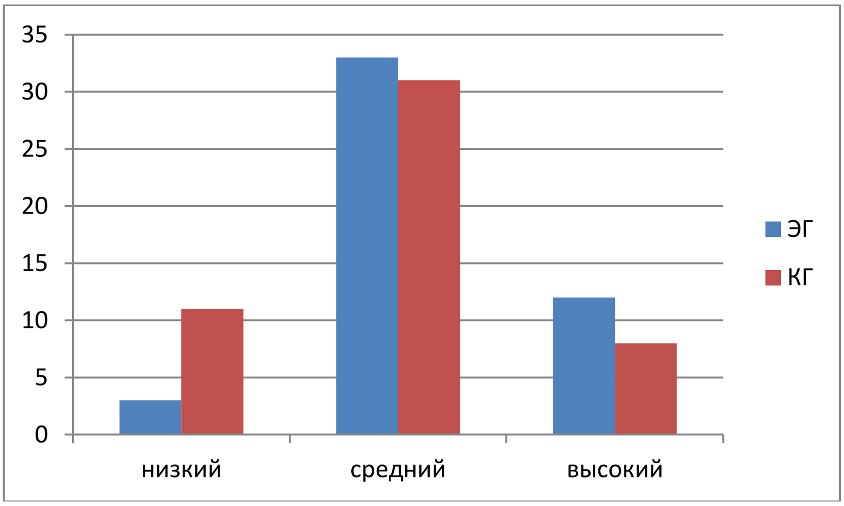


Рис. 1.2: *Уровень математической компетентности на контрольном этапе*

Итак, гистограммы показали, что уровень математической компетентности в этих группах имеет существенные различия : высокий уровень в контрольной группе - 16% , в экспериментальной - 25%; средний уровень в контрольной группе – 62% , в экспериментальной -68,8%; низкий уровень знаний в контрольной группе - 22%, в экспериментальной - 6,2%.

С целью выявления уровня сформированности исследовательских действий нами были использованы методы экспертной оценки и самооценки. В таблице 3 и на рис. 2.1 и 2.2 приведены количественные данные, полученные на начало (НЭ) и конец (КЭ) эксперимента.

Таблица 3

Распределение студентов контрольных и экспериментальных групп по уровням сформированности исследовательских действий на начало и конец обучающего эксперимента

Группы		Уровни сформированности ИД			Количество студентов	Средний уровень сформированности ИД	Дисперсия
		1	2	3			
ЭГ	НЭ	33	15	0	48	1,3125	0,215
	КЭ	17	26	5	48	1,75	0,396
КГ	НЭ	32	16	0	48	1,32	0,218
	КЭ	28	18	2	48	1,46	0,328

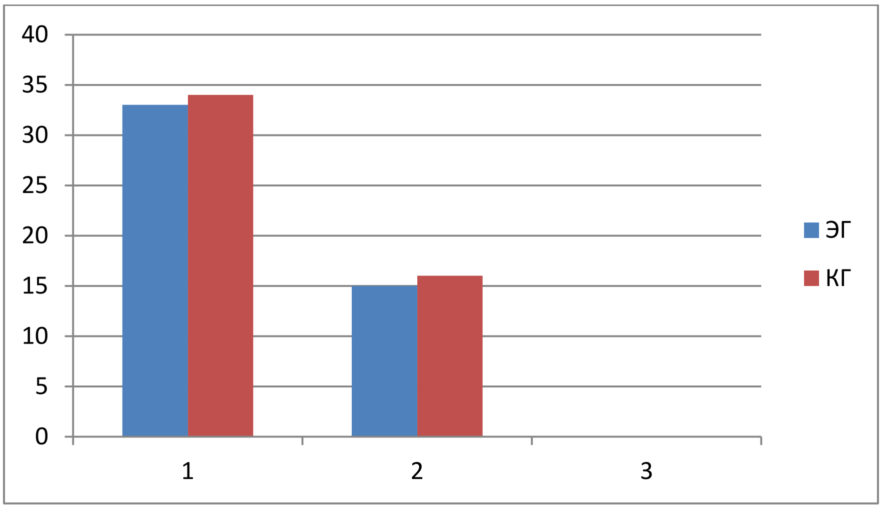


Рис. 2.1 *Уровень сформированности ИД на начало эксперимента*

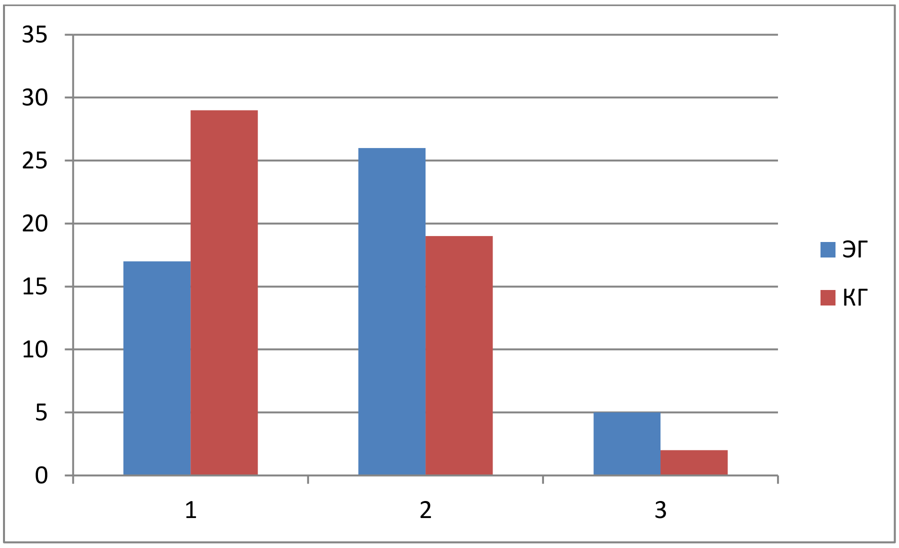


Рис. 2.2 *Уровень сформированности ИД на конечном этапе эксперимента*

Для анализа результатов эксперимента были использованы известные статистические методы [145], которые показывают меру правдоподобности принятия той или иной гипотезы. Статистическая обработка данной диагностики проводилась с использованием критерия Пирсона (критерий χ^2).

Для статистической обработки результатов по первому критерию (таблица 1) будем проверять следующие гипотезы:

1) H_0:Распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням математической компетенции незначимо отличаются на входном тесте (до обучения) друг от друга.

Для этого сравним распределения в строках 1 и 3, результат показан в таблице 4.

2) H_0: Распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням математической компетенции незначимо отличается после обучения друг от друга.

Для этого сравним распределения в строках 2 и 4, результат показан в таблице 5.

Таблица 4

Уровни МК	Частота ЭГ n_i	Частота КГ n_i'	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
Низкий	14	15	1	0,067
Средний	29	27	4	0,148
Высокий	5	6	1	0,167
Сумма	48	48		0,382

$\chi^2_{эмп}$=0,382. По таблице критических точек распределения по уровню значимости α=0,01 и числу степеней свободы k=2 находим критическую точку критической области $\chi^2_{кр}$(0,01; 2)=0,995 (также можно найти критическую точку, используя Microsoft Excel–ХИ2РАСП). Так как $\chi^2_{эмп}<\chi^2_{кр}$, нулевая гипотеза принимается. Следовательно, распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням математической компетенции не значимо отличаются на входном тесте друг от друга, что также показано и визуально с помощью диаграмм.

Таблица 5

Уровни МК	Частота ЭГ n_i	Частота КГ n_i'	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
Низкий	3	9	36	4,0
Средний	33	31	4	0,129
Высокий	12	8	16	2,0
Сумма	48	48		6,129

$\chi^2_{эмп}$=6,129; $\chi^2_{кр}$(0,01; 2)=0,995. Так как $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$, нулевая гипотеза опровергается на высоком уровне значимости, что позволяет судить о том, что разница частот контрольных и экспериментальных групп является статистически достоверной. Следовательно, распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням математической компетенции значимо отличаются после обучения друг от друга.

Таким образом, за период эксперимента произошли значительные изменения в уровне математической компетентности студентов.

Аналогично проводим статистическую обработку результатов по второму критерию (таблица 6) и будем проверять следующие гипотезы при уровне значимости α=0,01:

1) H_0:Распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням сформированности исследовательских действий незначимо отличаются на входном тесте друг от друга.

Для этого сравним распределения в строках 1 и 3, результат показан в таблице 6.

2) H_0: Распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням сформированности исследовательских действий не значимо отличается после обучения друг от друга.

Для этого сравним распределения в строках 2 и 4, результат показан в таблице 7.

Таблица 6

Уровни ИД	Частота ЭГ n_i	Частота КГ n_i'	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	33	32	1	0,029
2	15	16	1	0,0625
3	0	0	0	0
Сумма	48	48		0,0915

$\chi^2_{эмп}$=0,0915; $\chi^2_{кр}$(0,01; 2)=0,995. Так как $\chi^2_{эмп}<\chi^2_{кр}$, нулевая гипотеза принимается. Следовательно, распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням сформированности исследовательских действий не значимо отличаются друг от друга, что показано и визуально с помощью диаграмм.

Таблица 7

Уровни ИД	Частота ЭГ n_i	Частота КГ n_i'	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
1	17	28	121	4,321
2	26	18	64	3,556
3	5	2	9	4,5
Сумма	48	50		12,377

$\chi^2_{эмп}$=12,33; $\chi^2_{кр}$(0,01; 2)=0,995. Так как $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$, нулевая гипотеза отвергается. Следовательно, распределения студентов в экспериментальных и контрольных группах по уровням математической компетенции значимо отличаются после обучения друг от друга

Расчеты показывают, что различие средних уровней исследовательской деятельности студентов контрольной и экспериментальной групп статистически незначимо на уровнеα=0,01 на начало эксперимента и значимо по окончании обучающего эксперимента.

Положительные изменения произошли и в содержательном компоненте, повысился уровень предметных знаний студентов. Выполнение большого числа заданий, связанных с поиском различной информации предметного содержания, способствовало приращению предметных знаний, более глубокому осознанию связей между понятиями, законами, что позволило студентам решать задачи репродуктивного характера, частично-поискового, исследовательского. Студенты постоянно сталкивались с ситуациями, в которых предметные знания использовались в незнакомых ситуациях, что направляло их деятельность на поиски различных способов решения поставленных задач.

Выводы по главе II

1. В результате теоретического анализа психолого-педагогических исследований в области математического образования построена модель формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов. Глубокое теоретическое обобщение предметных знаний и способов их освоения в соответствии с целями и задачами формирования исследовательской деятельности будущих инженеров осуществляется на основе концепции фундирования опыта и становления индивидуального стиля личности обучающегося. Формирование исследовательской деятельности студентов происходит в три этапа:

   1. Адаптивный этап закладывает начальные исследовательские умения и формирует навык исследовательской деятельности студентов в различных её формах;

   2. На развивающем этапе происходит развитие компонентов исследовательской деятельности, подготовка к решению профессиональных исследовательских задач;

   3. Самоутверждающий этап характеризуется сформированностью ОК и ПК, интеграцией специальных, профессиональных знаний и математических знаний, готовностью к исследовательской деятельности.

2. В данной главе изложены некоторые моменты метода аналогии и показана его эффективность (при соответствующем обосновании) при исследовании большого класса нетривиальных модельных уравнений его в сочетании с различными современными математическими методами. Нами показано, что большой класс физических и биологических модельных задач может быть сведен к системам ОДУ с нелинейной (в частности, нормальной) матрицей. Предложенный метод анализа позволяет успешно решать задачи теории устойчивости указанного класса в процессе научно-исследовательской работы бакалавров, магистров, аспирантов.

3. Результат эксперимента по развитию исследовательской деятельности студентов на основе развертывания спирали фундирования индивидуального опыта личности показали что , если методика обучения математике реализуется на основе интеграции математических и методологических знаний посредством наглядности моделирования , с опорой на проблемный метод обучения, посредством решения профессионально ориентированных задач исследовательского характера с применением информационных и коммуникационных технологий, то у отдельных студентов к окончанию обучения в вузе развитие исследовательской деятельности достигает самого высокого уровня сформированности.

Заключение

На основе анализа педагогической и методической литературы выделены и систематизированы основные принципы, критерии отбора и факторы формирования содержания математического образования в техническом вузе, направленного на формирование исследовательской деятельности студентов технического профиля.

Разработана методика обучения математике, направленная на формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов на основе наглядного моделирования.

Создан банк задач по математическому моделированию, раскрывающий методологические и функциональные основы метода аналогий в обучении математике студентов технических вузов, при изучении некоторых классов нелинейных физических и биологических модельных задач. Задачи разбиты на группы:

- задачи устойчивости большого класса модельных систем ОДУ;
- физические задачи теории гироскопов при анализе модельной системы уравнений, описывающей процесс колебания тонкого кольцевого резонатора волнового твердого гироскопа(ВТГ);
- модельные спектральные задачи теории регулярных возмущений;
- задачи об исследовании Т- периодических систем, сводящихся к анализу неавтономных линейных систем ОДУ сТ – периодической матрицей.

Экспериментально проверена эффективность разработанной методики обучения математике, направленной на формирование и развитие исследовательской деятельности студентов на основе наглядного моделирования.

Библиография

[1] Абульханова-Славская, К.А. Избранные психологические труды [Текст]/ К.А. Абульханова-Славская. - Воронеж: Изд. НПО «МОДЭК», 1999.-224с.

[2] Алексеев, Н.Г. Концепция развития исследовательской деятельности учащихся [Текст] / Н.Г. Алексеев, А.В. Леонтович, А.С. Обухов, Л.Ф. Фомина // Исследовательская работа школьников. 2002.— № 1.— С. 24-33.

[3] Алехина, И.В.Актуальные проблемы развития высшей школы. Переход к многоуровневому образованию [Текст] // Сб.статей. СПб.: Изд-во ЛТА,1993.-234 с.

[4] Альтшуллер, Г.С., Злотин, А.В., Филатов, В.И. Поиск новых идей: от озарения к технологии : Теория и практика решения изобретательских задач [Текст]/ Г.С. Альтшуллер, А.В. Злотин, В.И. Филатов. - Кишинев :Картя Молдовеняска, 1989.-381 с.

[5] Аммосова, М.С.Профессиональная направленность обучения математике студентов горных факультетов вузов как средство формирования их математической компетентности [Текст]: автореф. дис … канд. пед. наук 13.00.02/ Аммосова, Маритта Савична . - Красноярск, 2009.

[6] Ананьев, Б.Г. Избранные психологические труды [Текст] : Соч. В 2 т. / Б.Г. Ананьев. – М. : Педагогика, 1980. - Т. 1.- 232 с. - Т. 2. - 288 с.

[7] Архангельский, С.И. Лекции по научной организации учебного процесса в высшей школе [Текст] / С.И. Архангельский. - М.: Высшая школа, 1986. - 200 с.

[8] Асмолов, А.Г. Динамический подход к психологическому анализу деятельности [Текст] / А.Г. Асмолов; Культурно-историческая психология и конструирование миров. – М.: Воронеж: Изд-во «Институт практической психологии», НПО «МОДЭК», 1996.— 768 с.

[9] Бабанский, Ю.К. Педагогика [Текст]: учебное пособие для студентов педагогических институтов/ Ю.К. Бабанский .- изд. 2-е, доп. и перераб. - М.: Просвещение, 1988. - 479с.

[10] Баловнев, Ю. Г. Математические модели в общеинженерном курсе [Текст] Ю.Г. Баловнев // Вестник высшей школы. 1973. - №6. - С. 28-30.
[11] Басов, М.Я. Избранные психологические произведения [Текст]/ М.Я. Басов. – М.: Наука, 1991. – 568с.
[12] Батищев, Г.С. Введение в диалектику творчества [Текст] / Г.С. Батищев. – Спб.: РХГИ, 1997. - 464с.
[13] Бахтин, М.М. К философии поступка [Текст] / М.М. Бахтин// Философия и социология науки и техники. Ежегодник 1984-1985. – М., 1986.
[14] Беляева, С.А. Теоретические основы фундаментализации общенаучной подготовки в системе высшего технического образования [Текст] / С.А. Беляева / дис.: д-ра пед.н. - Москва, 1999. - 458 с.
[15] Бердяев, Н.А. Смысл творчества [Текст] / Н.А. Бердяев. - М.: Фолио-Аст, 2002.
[16] Беспалько, В.П. Слагаемые педагогической технологий [Текст] / В.П. Беспалько. - М.: Педагогика, 1989. - 192 с.
[17] Бобровская, А.В. Обучение методу математического моделирования средствами курса геометрии педагогического института: дис … канд. пед. наук [Текст]/ А.В. Бобровская. – СПб, 1996. -232с.
[18] Большая советская энциклопедия. В 30 т. Т. 8. [Текст]/ Под ред. А.М. Прохорова. - М. : Изд-во "Советская энциклопедия", 1972. – 592 с.
[19] Большой толковый психологический словарь. В 2 т. Т. 1[Текст]. А-О пер. с англ. / Ребер Артур. - М. : 2000. - 529 с.
[20] Брунер, Дж. Психология познания [Текст] / Дж. Брунер. - М., 1977. - 360с.
[21] Брушлинский, А.В. Деятельность субъекта и психическая деятельность (деятельность: теория, методология, проблемы) [Текст] / А.В. Брушлинский. - М.: Политиздат, 1990. - 19 с.
[22] Былов, Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости [Текст] / Б.Ф. Былов., Р.Э. Виноград , Д.М. Гробман, В.В. Немьщний. - М.: МГУ, 1966. - 576с.

[23] Бэкон, Ф. Собрание сочинений. В 2 т. Т. 1. [Текст] / Ф. Бэкон. - М.: Мысль, 1977. - 567 с.
[24] Вазов, В. Асимптотические разложения решений ОДУ [Текст]/ В.Вазов. - М., Мир, 1968. – 464с.
[25] Вакджира, Мергия Балча. Организация научно-исследовательская деятельность студентов ISSN 1991-5497 [Текст] / М.Б. Вакджира// Международный научный журнал «Мир науки, культуры, образования» (34), июнь 2012 № 3. – С.139 -141
[26] Вакджира, Мергия Балча. Исторический аспект математического моделирования[Текст]/ М.Б. Вакджира// ISSN 0869-8732.Вестник РУДН, серия «Психология и педагогика», 2012. – №4. – С 66-69.
[27] Вакджира, Мергия Балча. О возможностях метода моделирования в современном образовании[Текст]/ М.Б. Вакджира// Сборник трудов международной конференции «Интеграционные процессы в естественном и математическом образовании». – Москва, РУДН,4-6 февраля2013г. – С.289 - 293.
[28] Вакджира, М.Б. Философские основы математического моделирования [Текст]/ М.Б. Вакджира// Математическое образование и информационное общество: проблемы и перспективы: сборник трудов XLVIII Всероссийской (с международным участием) конференции. 18-21 апреля 2012 г. / под общ. Ред. Е.И. Саниной. – М.: РУДН, 2012. – С. 179 – 184.
[29] Вакджира, М.Б. Организация исследовательской деятельности при обучении математике студентов инженерных специальностей [Текст]/ М.Б. Вакджира, Ю.А. Коняев// Актуальные вопросы теории и методики обучения: сборник научных трудов. – М.: РУДН, 2011. – Вып. 1. – С. 155 – 157.
[30] Вакджира, М.Б. О возможностях метода моделирования в современном образовании [Текст]/ М.Б. Вакджира// Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании: сборник научных трудов участников международной конференции. – Москва, РУДН, 4-6

февраля 2013 г. / под общ.ред. Е.И. Саниной. – М.: РУДН, 2013. – С. 289 – 293.

[31] Вакджира, М.Б Формирование и развитие исследовательской деятельности студентов технических вузов [Текст]/ М.Б. Вакджира// Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном мире: сборник научных трудов участников международной конференции. Москва, РУДН, 24-26 апреля 2013г. – М.: РУДН, 2013. – С. 311-316.

[32] Вакджира, М.Б. Философские основы математического моделирования [Текст]/ М.Б. Вакджира// Сборник трудов. XLVIII всероссийской (с международным участием) конференции «Математическое образование и информационное общество». – Москва, РУДН, 2012г. – С.179-184.

[33] Вакджира, М.Б. Влияние информационных и коммуникационных технологий на формирование исследовательской деятельности студентов. [Текст]/ М.Б. Вакджира// Проблемы и перспективы обучения математике, информатике и естественнонаучным дисциплинам в средней и высшей школах в условиях внедрения новых ФГОС: материалы региональной научно-практической конференции (Благовещенск, 5 – 6 апреля 2013 г.) / под общей редакцией А.В. Василенко. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2013. – С.122-125.

[34] Вакджира, М.Б. Формирование исследовательской деятельности студентов технического профиля основе концепции фундирования индивидуального опыта личности. [Текст]/ М.Б. Вакджира// Сборник научных трудов международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном мире». – М.: РУДН, 2013. –С.311-316.

[35] Вакджира, М.Б. Наглядное моделирование как основа формирования исследовательской деятельности студентов технических вузов в процессе обучения математике [Текст]/ М.Б. Вакджира// Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 1; URL: www.science-education.ru/115-11954 (дата обращения: 07.02.2014).

[36] Васенин, В.А. Информационные технологии в практике научных исследований и высшей школы: Автореф. дис . д-ра. физ.-мат. наук [Текст] / В.А. Васенин. Новосибирск: 1997. - 42 с.

[37] Вейт, М.А. Непрерывное образование и совершенствование педагогического процесса в высшей школе: учебное пособие [Текст]/ М.А. Вейт, Б.К. Оганянц. Воронеж : ВГПИ, 1990. - 205 с.

[38] Воеводин, В.В. Линейная алгебра[Текст]/ В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1974. – 336 с.

[39] Гальперин, П.Я. Теоретические основы инноваций в педагогике[Текст] / П.Я. Гальперин. – М., 1991. – 326 с.

[40] Гастев, Ю.А. О гносеологических аспектах моделирования. «Логика и методология науки» [Текст]/ Ю.А. Гастев// IV Всесоюзный симпозиум. – Киев. Июнь 1965 г. М., 1967.

[41] Гершунский, Б.С. Философия образования[Текст]/ Б.С. Гершунский. – М.: Флинта, 1998. - 432 с.

[42] Гершунский, Б.С. Философия образования для XXI века (в поисках практико-ориентированных концепций) [Текст] / Б.С. Гершунский. – М.: Интердиалект, 1997. – 697с.

[43] Глинский, Б.А. Моделирование как метод научного исследования (гносеологический анализ) [Текст] / Б.А. Глинский, Б.С. Грязнов, Б.С. Дынин, Е.П. Никитин. – М.: Изд-во Московского университета, 1965. - 248с.

[44] Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2000. – 478с.

[45] Гнеденко, Б.В. Предисловие в сборнике статей "Математика как профессия" [Текст]/ Б.В. Гнеденко. – М.: Знание, 1980. – Вып.№6 – С. 3-23.

[46] Горохов, В.И. Введение в философию техники: учеб. пособие [Текст]/ В.И. Горохов, В.М. Розин; науч. ред. Ц. Г. Арзаканян. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 224 с.

[47] Горстко, А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием[Текст]/ А.Б. Горстко. – М.: Знание, 1991. – 160с.
[48] Государственные образовательные стандарты (ГОС), 1994-1999 годы http://www.edu.ru/db/portal/spe/klassif.htm
[49] Государственные образовательные стандарты (ГОС), 2000-2005 годы http://www.edu.ru/db/portal/spe/archiv.htm
[50] Государственные образовательные стандарты (ГОС), 2005-2006 годы http://www.edu.ru/db/portal/spe/archiv_okso.htm
[51] Гребеников, Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах [Текст]/ Е.А. Гребеников. – М.: Наука, 1986. – 256с.
[52] Гребенюк, О.С. Общая педагогика : курс лекций [Текст]/ О.С. Гребенюк. — Калининград : Калининградский ун-т, 1996. – 107 с.
[53] Давыдов, В.В. Теория развивающего обучения [Текст]/ В.В. Давыдов. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.
[54] Далингер, В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей [Текст]/ В.А. Далингер.— Омск: Ом ИПКРО, 1993. – 323 с.
[55] Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости [Текст]/ Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1998. – 480с.
[56] Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике [Текст]/ Дж. Коул. – М.: Мир, 1972. – 276с.
[57] Дильман, В.В. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии [Текст]/ В.В. Дильман, А.Я. Полянин. – М.: Химия, 1988. - 304 с.
[58] Дьяченеко, М.И. Психология высшей школы: (Особенности деятельности студентов и преподавателей вуза) [Текст]/ М.И. Дьяченеко, JI.А. Кандыбович. – Мн.: Изд-во БГУ, 1978. – 320 с.
[59] Дружинин, В.Н. Экспериментальная психология [Текст]/ В.Н. Дружинин. – СПб.: Питер, 2001. – 320с.
[60] Зимняя, И.А. Педагогическая психология : учеб. пособие [Текст]/ И.А. Зимняя. – Ростов н/Д.: Изд-во «Феникс», 1997. - 480 с.

[61] Зимняя, И.А. Исследовательская работа как специфический вид человеческой деятельности [Текст]/ И.А. Зимняя, Е.А. Шашенкова. – Ижевск-Москва, 2001.

[62] Ильин, Е.П. Мотивация и мотивы [Текст] / Е.П. Ильин. – СПб.: Питер, 2002. -512 с.

[63] Ильина, Т.А. Педагогика. Общие основы педагогики [Текст]/ Т.А. Ильина. – М.: Просвещение, 1968. -570с.

[64] Лебедев, С.А. Инженер — философия — вуз [Текст]/ С.А. Лебедев, В.И. Медведев, О.П. Семенов [и др.]; под ред. И.А. Майзеля, А.П. Мозелова, Б.И. Федорова. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1990.— 128 с.

[65] Карташев, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного счисления [Текст]/ А.П. Карташев, Б.Л.Рождественский. – М.: Наука, 1988. – 272 с.

[66] Като, Т. Теория возмущений линейных операторов [Текст]/ Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740с.

[67] Колмогоров, А.Н. Математика - наука и профессия [Текст]/ А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1988. – 288с.

[68] Коняев, Ю.А. Метод унитарных преобразований в теории устойчивости [Текст]/ Ю.А. Коняев// «Изв. ВУЗ. Математика.». – 2002. – № 2. – С. 41-45.

[69] Коняев, Ю.А. Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений [Текст]/ Ю.А. Коняев// Математический сборник. – 1993. – №12. – Т. 184. –С.133-144.

[70] Коняев, Ю. А.О некоторых методах исследования устойчивости [Текст]/ Ю.А. Коняев// Математический сборник. – 2001. – Т.192. – № 3. – С.65 – 82.

[71] Коняев, Ю.А. Исследовательская деятельность как педагогическая категория [Текст]/ Ю.А. Коняев, М.Б. Ваkджира// ISSN 1991-5497 Международный научный журнал «Мир Науки, культуры, образования.» № 6 (37), июнь 2012. – С.174-176.

[72] Коняев, Ю.А. О регулярных и сингулярных возмущенных модельных системах ОДУ полиномиального типа с особенностями [Текст]/

Ю.А. Коняев, М.Б. Ваkджира// ISSN 0869-8732. Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». – 2012. – № 3. – С. 20- 24.
[73] Коняев, Ю.А. Асимптотика собственных частот анизотропного резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) [Текст]/ Ю.А. Коняев, Д.В. Михайлов, М.Б. Ваkджира// Ярославский педагогический вестник. – 2012. – №1. – Т.III. – С. 37-38.
[74] Коняев, Ю.А. Анализ малых колебаний микромеханического гироскопа (ММГ) на вибрационном основании [Текст]/ Ю.А. Коняев, Д.В. Михайлов, М.Б. Ваkджира// Математическое моделирование. – 2012. – Т.24. – № 5. – С.61-65.
[75] Коняев, Ю.А. Исследование неавтономных уравнений в теории гироскопов[Текст]/ Ю.А. Коняев, Д.В. Михайлов, М.Б. Ваkджира// Ярославский педагогический вестник. – 2012. – №3. – Т.III. – С.40-43.
[76] Коняев, Ю.А. Организация исследовательской деятельности при обучении математике студентов инженерных специальностей[Текст]/ Ю.А. Коняев, М.Б. Ваkджира// Сборник научных трудов «Актуальные вопросы теории и методики обучения». – М., 2011. – Вып.1. – С. 155-157.
[77] Коняев, Ю.А. О методе аналогии при изучении математических моделей студентами инженерных специальностей [Текст]/ Ю.А. Коняев, М.Б. Ваkджира// Сборник трудов международной конференции «Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании». – М.: РУДН, 2013. – С 369 – 373.
[78] Корнеев, В.В. Математические основы теории оптимального управления. Часть2: Учебно-методические материалы [Текст]/ В.В. Корнеев, К.Ф. Малявко. – М.: Изд-во академии БТВ, 1986. - 52 с.
[79] Коровина, Ю.В. Функциональное моделирование в контексте информационных и коммуникационных технологий [Текст]/ Ю.В. Коровина// Информационно-коммуникативные технологии в педагогическом образовании (Электронный научный журнал) http://ioumal.kuzspa.ru/articles/58/

[80] Кудрявцев, Л.Д. Мысли о современной математике и её изучении [Текст]/ Л.Д. Кудрявцев.- М.: Наука, 1985. – 176 с.
[81] Кудрявцев, Л.Д. Современная математика и ее преподавание [Текст]/ Л.Д. Кудрявцев.- М.: Наука, 1985. – 170 с.
[82] Кузьмина, Н.В. Очерки психологии труда учителя. Психологическая структура деятельности учителя и формирование его личности [Текст] / Н.В.Кузьмина.— Л.: Изд. ЛГУ, 1967.— 183 с.
[83] Куровской, В.Л. Дидактические условия формирования инженерно-графических умений и навыков студентов технических вузов. Дис . канд. пед. наук [Текст] /В.Л. Куровской. – Хмельницкий, 1983.- 220с.
[84] Лакатос, И. История науки и её рациональные реконструкции. Структура и развитие науки [Текст]/ И. Лакатос. – Из Бостонских исследований по истории науки.
[85] Ланкастер, П. Теория матриц [Текст]/ П. Ланкастер. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
[86] Леднев, В.С. Содержание образования: сущность, структура, перспективы[Текст] / В.С. Леднев.— М.: Высшая школа, 1991.— 224 с.
[87] Леонтьев, А.Н. Деятельность. Сознание. Личность [Текст]/ А.Н. Леонтьев, — М. : Политиздат, 1977. – 304 с.
[88] Леонтьев, А.Н. Избранные психологические произведения. В 2 т. Т. 2. [Текст]/ А.Н. Леонтьев; под ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко, А.А. Леонтьева, А.В. Петровского. – М. : Педагогика, 1983. - 320 с.
[89] Лихтарников, Л.М. Первое знакомство с математической логикой [Текст]/ Л.М. Лихтарников. – СПб: Лань, 1997. - 109 с.
[90] Леонтьев, А.Н. Избранные психологические произведения. В 2 т. Т.1. [Текст] / А.Н. Леонтьев; под ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко, А.А. Леонтьева, А.В. Петровского. — М. : Педагогика, 1983. -390 с.
[91] Лернер, И.Я. Дидактические основы методов обучения[Текст] / И.Я. Лернер. -М. : Педагогика, 1981.- 186 с.

[92] Максимова, В.Н. Сущность функции межпредметных связей в целостном процессе обучения: дис. д-ра.пед. наук[Текст] / В.Н. Максимова. – Л., 1981. -446 с.

[93] Мажирина, Р.Е. Формирование готовности студентов электротехнических специальностей к проведению инженерного эксперимента. Автореф. дис . канд. пед.. наук [Текст]/ Р.Е. Мажирина. – 2009г.

[94] Маслоу, А.Х. Мотивация и личность [Текст] / А.Х. Маслоу; пер. с англ. — СПб. : Евразия, 1999. – 478 с.

[95] Меркин, Д.Р. Введение в теорию устойчивости движений [Текст]/ Д.Р. Меркин. – М.: Наука,1987. – 304с.

[96] Меркурьев, И.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов [Текст]/ И.В. Меркурьев, В.В. Подалков. – М.: Физматлит, 2009. – 228 с.

[97] Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики [Текст]/ Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981.– 400с.

[98] Морозов, К.Е. Математическое моделирование в научном познании [Текст]/ К.Е. Морозов. – М.: Мысль, 1969. - 212с.

[99] Мышкис, А.Д. Элементы теории математических моделей [Текст]/ А.Д. Мышкис; 3-е изд., испр. - М.: Ком Книга, 2007. - 192с.

[100] Найфе, А. Методы возмущений [Текст]/ А. Найфе. – М.: Мир, 1976. – 456с.

[101] Новиков, А.М. О законах педагогики [Текст]/ А.М. Новиков// Педагогика. Научно теоретический журнал Российской академии образования. – 2011. - №3. -С.3-8.

[102] Обухов, А.С. Исследовательская деятельность как возможный путь вхождения подростков в пространство культуры [Текст] / А.С. Обухов // Развитие исследовательской деятельности учащихся: Методический сборник.— М.: 2001.—С. 46-48.

[103] Ожегов, С.И. Толковый словарь русского языка[Текст] / С.И. Ожегов,

Н.Ю. Шведова. – М.: Азбуковник, 1999. - 944 с.
[104] Пискунов, М.У. Организация учебного труда студентов [Текст]/ М.У. Пискунов. – Мн. : Издательство БГУ, 1982. - 142 с.
[105] Ориентация учащихся на рабочие профессии в процессе преподавания физики (Методические рекомендации для студентов физико-математического факультета) [Текст]/ Мин-во нар. Обр-я РСФСР, ОГПИ им. Т.Г. Шевченко. – Орск, 1989. - 35 с.
[106] Педагогика: педагогические теории, системы, технологии: учеб.для студ. высш. и сред. пед. учеб. заведений[Текст] / С.А. Смирнов, И.Б. Котова, Е.Н. Шиянов [и др.]; под ред. С.А. Смирнова. 4-е изд. испр. — М. : Издательский центр "Академия", 2001. - 512 с.
[107] Педагогическая энциклопедия. В 5 т. Т. 2. Ж - М [Текст]/ Под ред. И.А. Каирова, Ф.Н. Петрова [и др.]. – М.: Изд. "Советская энциклопедия", 1965. - 911 с.
[108] Петрова, Р.П. Систематизация форм реализации межпредметных связей при формировании у студентов втуза научных понятий[Текст]/ Р.П. Петрова. – Автореф. дис. канд. пед. наук (13.00.01) , Челябинск: 1993. — 21с.
[109] Петровский, А.В. Личность. Деятельность. Коллектив [Текст]/ А.В. Петровский. – М.: Политиздат, 1982. - 255 с.
[110] Поддьяков, А.Н. Исследовательское поведение. Стратегии познания, помощь, противодействие, конфликт [Текст] / А.Н. Поддьяков. – М.: 2000. - 240 с.
[111] Поппер, К. Логика и рост научного знания [Текст]/ К. Поппер. - М.: Прогресс, 1983. – 302 с.
[112] Постников, А.Г. Избранные труды [Текст]/ А.Г. Постников. – М.: Физматлит, 2005. – 512с.
[113] Потапов, А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. [Текст]/ А.А. Потапов. — М.: Университетская книга, 2005.— 848с.

[114] Прасолов, А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии: учеб. Пособие [Текст]/ А.В. Прасолов. – СПб.: Лань, 2010. - 192с.
[115] Пуанкаре, А. Избранные труды [Текст]/ А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971. – Т.1.
[116] Пухначев, Ю.В. Математика без формул [Текст]/ Ю.В. Пухначев, Ю.П. Попов. – М.: Столетие, 1995. - 512с.
[117] Разумовский, В.Г. Развитие творческих способностей учащихся в процессе обучения физике: пособие для учителей [Текст]/ В.Г. Разумовский. – М.: Просвещение, 1975. - 272 с.
[118] Ренье, А. Диалоги о математике. Перевод с англ. Д.Б. Гнеденко, Е.А. Масловой [Текст]/ А. Ренье; под ред. Д.Б. Гнеденко. – М.: Мир, 1969. – 108с.
[119] Роберт, И.В. Новые информационные технологии в обучении: дидактические проблемы, перспективы использования [Текст]/ И.В. Роберт// Информатика и образование.— 1991.— №4.— С. 18-25.
[120] Розо, М. Нелинейные колебания и теория устойчивости [Текст]/ М. Розо. – М.: Наука, 1971. – 288с.
[121] Романов, П.Ю. Педагогические аспекты математического образования [Текст]/ П.Ю. Романов; под ред. П.Ю. Романова. Магнитогорск: МАГУ, 2010. – Вып.7. –123с.
[122] Рубинштейн, С.Л. Основы общей психологии. В 2 т. Т. 2. [Текст]/ С.Л. Рубинштейн. – М.: Педагогика, 1989. - 328 с.
[123] Рузавин, Г.И. Математизация научного знания [Текст]/ Г.И. Рузавин. – М: Мысль, 1984. -207с.
[124] Руш, Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости [Текст]/ Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
[125] Рыбников, К.А. Введение в методологию математики [Текст]/ К.А. Рыбников. – М.: Изд-во МГУ, 1979. - 128 с.
[126] Саввичев, А.С. Развитие исследовательской деятельности учащихся: метод. сборник [Текст]/ А.С. Саввичев. – М.: Народное образование, 2001. -

272 с.
[127] Савенков, А.И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению: учеб. пособие [Текст]/ А.И. Савенков.— М.: «Ось-89», 2006.— 480 с.
[128] Салмина, Н.С. Виды и функции материализации в обучении [Текст]/ Н.С. Салмина. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. - 133 с.
[129] Салмина, Н.С. Знак и символ в обучении [Текст]/ Н.С. Салмина. – М.: Из-во МГУ, 1988. – 288с.
[130] Самарин, Ю.А. Очерки психологии ума: Особенности умственной деятельности школьников [Текст]/ Ю.А. Самарин. – М.: Изд-во АПН РССФР, 1962. - 504 с.
[131] Самарин, Ю.А. Очерки психологии ума: Особенности умственной деятельности школьников [Текст]/ Ю.А. Самарин. – М.: Изд-во АПН РССФР, 1962. - 504 с.
[132] Самарский, А.А., Михайлов, А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры [Текст]/А.А. Самарский, А.П. Михайлов; 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2002. -320с.
[133] Сидоренко, Е.В. Методы математической обработки в психологии [Текст]/ Е.В. Сидоренко. – СПб.: Речь, 2006.
[134] Синицина, Г.Н. Развитие комптентности в проектной деятельности у студентов технических специальностей: дис . кандидата пед. наук[Текст] / Г.Н. Синицина. – Оренбург : ОГУ, 2003. - 187 с.
[135] Самоукина, Н.В. Психология и педагогика профессиональной деятельности [Текст]/ Н.В. Самоукина. – М.: Ассоциация авторов и издателей "ТАНДЕМ". Издательство ЭКМОС, 1999. - 352 с.
[136] Севостьянов, А.Г. Моделирование технологических процессов: учебник [Текст]/ А.Г. Севостьянов, П.А. Севостьянов. – М.: Легкая и пищевая промышленность. 1984. -344с.

[137] Сериков, В.В. Образование и личность. Теория и практика проектирования педагогических систем [Текст] / В.В. Сериков.— М.: Логос, 1999.— 272 с.

[138] Синицина, Г.Н. Развитие компетентности в проектной деятельности у студентов технических специальностей: дис . кандидата пед. наук [Текст]/ Г.Н. Синицина. – Оренбург :ОГУ, 2003. - 187 с.

[139] Скоробогатова, Н.В. Наглядное моделирование профессионально ориентированных задач в обучении математике студентов инженерных направлений технических вузов: дис. . канд. пед. наук [Текст]/ Н.В. Скоробогатова. – Ярославль, 2006. - 183 с.

[140] Смирнов, А.А. Избранные психологические труды. [Текст]/ А.А. Смирнов. – М.: Педагогика, 1987. – 344 с.

[141] Смирнов, Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст]/ Е.И. Смирнов. – Ярославль: Издательство «Канцлер», 2012. – 647с.

[142] Смирнов, Е.И. Формирование нелинейного мышления студентов посредством визуализации само подобных множеств [Текст]/ Е.И. Смирнов, В.И. Осташков// Труды II Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. – С.173-189.

[143] Смирнов, С.Д. Методологические основы психологии [Текст]/ Т.В. Корнилова, С.Д. Смирнов. - СПб.: Питер, 2007. – 320с.

[144] Сластенин, В.А. Педагогика: учеб. пособие [Текст]/ В.А. Сластенин, И.Ф. Исаев, А.И. Мищенко, Е.Н. Шиянов; 3-е изд. - М.: Школа - Пресс, 2000. - 512 с.

[145] Солодухин, Н.А. Моделирование как метод обучения физике в средней школе: дис. . канд. пед. наук [Текст]/ Н.А. Солодухин. – М.: МГЛУ, 1971. - 274 с.

[146] Справочник для студентов технических вузов: высшая математика: физика: теоретическая механика: сопротивление материалов [Текст]/

А.Д. Полянин, В.Д. Полянин, В.А. Попов [и др.]; 3-е изд. — М.: АСТ: Астрель, 2007.— 735с.
[147] Теплов, Б.М. Избранные труды [Текст]: в 2-х т. / Б.М. Теплов. – М.: Педагогика, 1985. – Т.1. - 328с. – Т.2. – 360 с.
[148] Терешин, Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: кн. для учителя [Текст]/ Н.А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. - 96с.
[149] Толковый словарь русского языка: В 4 т. [Текст]/ Под ред. Д.Н. Ушакова. – Т. 1. М., 1935; Т. 2. М., 1938; Т. 3. М., 1939; Т. 4, М., 1940. (Переиздовался в 1947/1948 гг.); Репринтное издание: М., 1995; М., 2000.
[150] Уемов, А.И. Логические основы метода моделирования [Текст]/ А.И. Уемов. – М.: Мысль, 1971. – 312 с.
[151] Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]/ М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1981. – 400с.
[152] Философский словарь [Текст] / Под ред. И.Т. Фролова. 4-е изд. - М.: Политиздат, 1981. -445 с.
[153] Фридман, Л.М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст]/ Л.М. Фридман. – М.: Знание, 1984. – 80 с.
[154] Фридман, Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе [Текст] / Л.М. Фридман. — М.: Просвещение, 1983.— 160 с.
[155] Фридрихс, К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве [Текст]/ К. Фридрихс. – М.: Мир, 1969.
[156] ФГОС ВПО по направлениям подготовки бакалавров. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования http://fgosvo.ru/fgosvpo/7/6/1
[157] Хекхаузен, Х. Мотивация и деятельность. В 2 т. Т.1. [Текст]/ Х. Хекхаузен; пер. с нем. Б.М. Величковского. – М.: Педагогика, 1986. - 408с.

[158] Черкасов, А.И. Моделирование как средство управление обучением дис. академич. степени магистра педагоги [Текст]/ А.И. Черкасов. – СПб., 1997.
[159] Чошанов, М.А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения [Текст]/ М.А. Чошанов. – М.: Народное образование, 1996. - 284 с.
[160] Чуев, Ю.В. Исследование операций в военном деле [Текст]/ Ю.В. Чуев. – М.: Воениздат,1970. – 254с.
[161] Шадриков, В.Д. От индивида к индивидуальности [Текст]/ В.Д. Шадриков. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2009. -656с.
[162] Шадриков, В.Д. Психология деятельности и способности человека : учеб. пособие [Текст] / В.Д. Шадриков; 2-е изд, перераб. и доп. - М.: Издательская корпорация "Логос", 1996. - 320 с.
[163] Шапиро, И.М. Использование задач с практическим содержанием в обучении математике [Текст]/ И.М. Шапиро. – М.: Просвещение, 1990.
[163] Штофф, В.А. Моделирование и философия [Текст]/ В.А. Штофф. – М.: Наука, 1966. – 301 с.
[164] Штофф, В.А. Роль моделей в познании [Текст]/ В.А. Штофф. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1963. - 127с.
[165] Щедровицкий, П.Г. Очерки по философии образования (статьи и лекции) [Текст]/ П.Г. Щедровицкий. — М.: Педагогический центр «Эксперимент», 1993. – С.52-53.
[166] Эльконин, Д.Б. Избранные психологические труды [Текст]/ Д.Б. Эльконин. – М.: Международная педагогическая академия, 1995. - 224 с.
[167] Юдин, Э.Г. Системный подход и принцип деятельности: Методологические проблемы современной науки [Текст]/ Э.Г. Юдин. – М.: Наука, 1978. - 391с.
[168] Якобсон, П.М. Психологические проблемы мотивации поведения человека [Текст] / П.М. Якобсон. – М.: 1969. - 317с.
[169] Якобсон, П.М. Процесс творческой работы изобретателя [Текст] / П.М. Якобсон. – М.: 1934. - 317 с.

[170] Ястребов, А.В. Дуалистические свойства математики и их отражение в процессе преподавания [Текст]/ А.В. Ястребов// Ярославский педагогический вестник. – 2001. – № 1. – С. 48-53.
[171] Ястребов, А.В. Моделирование научных исследований как средство оптимизации обучения студента педагогического вуза: автореф. дис. д-ра пед. наук [Текст]/ Александр Васильевич Ястребов. – Ярославль,1997.
[172] Wakjira, Mergia Balcha «basic of students' activity in scientific – research» "naukow amys linformacy jnejpowieki- 2012" volume 15[Текст] pedagogi cznenauki. 2012 URL: http://geo.web.ru/druza/pg-100-119r/page-105.html

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРОГРАММА

Наименование дисциплины:

Математическое моделирование

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

_____552700 «Энергомашиностроение»_______

Квалификация (степень) выпускника _бакалавр техники и технологии__

1. **Цели и задачи дисциплины:**

- изучение основ математического моделирования.

-сформировать у студентов целостное представление о роли математических методов и математических моделей в инженерных процессах;

- раскрыть основные понятия и методы математического моделирования инженерных процессов;

- сформировать и развить у студентов навыки применения методологии и методов математического моделирования с использованием математического аппарата, а также вычислительной техники к прикладным инженерным задачам;

- научить студентов самостоятельной работе с учебной и научной литературой;

- развивать и совершенствовать логическое и аналитическое мышление для умения анализировать, сравнивать, оценивать, выбирать, интерпретировать и т.д.

---

2. Место дисциплины в структуре ООП: Математический и естественнонаучный цикл. Базовая часть

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

- Способность применять знания на практике (ОК-6);
- Способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-8);
- Фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности (ОК-11);
- Способность к анализу и синтезу (ОК-14);
- Умение формулировать результат (ПК-3)
- Умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат (ПК-5)
- Умение ориентироваться в постановках задач (ПК-8)
- Знание корректных постановок классических задач (ПК-9)
- Понимание корректности постановок задач (ПК-10)
- Владение методами математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач (ПК-20)

- Умение самостоятельно математически корректно ставить естественнонаучные и инженерно-физические задачи (ПК-25)

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать

- Основные понятия и типы математических моделей;
- Основные методы построения инженерно -математических моделей;

Уметь

- Составлять математическую модель конкретной задачи;
- Классифицировать задачи по типам;
- Выбирать способы решения поставленных задач;
- Анализировать и интерпретировать данные и полученные решения;
- Применять математические модели к решению прикладных и исследовательских задач, основные методы исследования математических моделей с использованием компьютера. Составлять математические модели в различных областях знания и исследовать их с помощью компьютера.

Владеть

- Навыками математических вычислений;
- Навыками сведения задач принятия управленческих решений к математической модели;
- Анализа обработки данных для математической постановки и решения задач;
- Методами и техническими средствами решения задач
- Навыками анализа и интерпретации полученных решений.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 331 час или 7 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2	3	4
Аудиторные занятия (всего)	187			102	85
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции				68	51
Практические занятия (ПЗ)				34	17

Семинары (С)				-	
Лабораторные работы (ЛР)				-	17
Самостоятельная работа (всего)	144			72	72
В том числе:	-	-	-	-	-
Курсовой проект (работа)				40	40
Расчетно-графические работы				16	16
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы				16	16
Вид итоговой аттестации (зачет, экзамен)				Экз.	Экз.
Общая трудоемкость час	331			174	167
зач. ед.	7			4	3

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Введение	Что такое математическое моделирование? Примеры. Понятие модели. Математическое описание систем. Временные ряды и динамические системы. Линейность, стационарность и полнота. Управляемость и наблюдаемость. Потоки. ω- предельные и α-предельные множества. Аттракторы и репеллеры. Теорема Пуанкаре - Бендиксона. Каскады и их свойства.
2.	Устойчивость	Устойчивость по Ляпунову. Устойчивость в целом. Теоремы об асимптотической устойчивости в целом. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Структурная устойчивость и бифуркации. Бифуркации положения равновесия. Показатели Ляпунова. Бифуркационная теорема Хопфа. Теорема Ляпунова о центре. Обобщенные координаты и принцип наименьшего действия. Уравнения Эйлера - Лагранжа. Преобразование Лежандра и его основные свойства.

		Уравнения Гамильтона. Законы сохранения. Переменные действие - угол. Универсальное отображение нелинейных колебаний. Одномерный осциллятор, нелинейный осциллятор. Колебания электронной плазмы.
3.	Нелинейные и динамические системы	Диссипативные и автоколебательные системы. Уравнение Ван дер Поля. Стационарное решение при больших ε. Метод малого параметра. Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля при малых ε. Движение в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля. Теорема Пуанкаре о невозвращении и ее применения. Теорема КАМ. Химические и биохимические реакции. Автокаталитическая реакция. Модель роста популяции Мальтуса. Модель Лотки - Вольтерра для случая конкуренции между видами. Модель Лотки - Вольтерра "хищник - жертва". Брюсселятор и его исследование. Орегонатор и его исследование. Уравнение Навье - Стокса. Ламинарное и турбулентное движение жидкости. Модель Лоренца. Исследование модели Лоренца. Понятие об имитационном моделировании и языках моделирования.
4.	Логистические отображения и их свойства	Исследование логистического отображения методом ренормгруппы. Универсальность бифуркаций удвоения периода. Постоянные Фейгенбаума. Сдвиг Бернулли. Связь показателей Ляпунова и энтропии при исследовании одномерных отображений. Эргодические преобразования. Примеры отображений. Эргодическая теорема. Вычисление показателей Ляпунова для некоторых систем. Отображение окружности на себя. Число Вращения. Исследование стандартного отображения окружности на себя. Некоторые двумерные отображения. Отображение пекаря и его свойства. Отображение Хенона и его исследование. Фрактальные понятия нелинейной динамики. Примеры фракталов и их емкостная размерность. Меры фрактальной размерности и их сравнение.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9,10
1.	**Прикладная математика**	+		+					+	
2.	**Физика**			**+**				**+**		**+**
3.	**Теоретическая механика**		**+**	**+**				**+**		
4.	**электротехника**			**+**	**+**	**+**		**+**	**+**	**+**

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин	СРС	Все-го час.
1.	Введение	22	10			16	48
2.	Устойчивость	24	12			16	52
3.	Нелинейные и динамические системы	22	12			40	74
4.	Логистические отображения и их свойства	51	17	17		72	167

6. Лабораторный практикум -17ч.

ТЕМЫ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ:

1. Моделирование столкновения шаров.
2 Моделирование простейшего логистического отображения.
3. Исследование модели Лоренца.
4. Моделирование странного аттрактора Хенона.
5. Моделирование двух связанных осцилляторов.

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1.	Введение	Что такое математическое моделирование? примеры. Понятие модели. Математическое описание систем. Временные ряды и динамические системы. Линейность, стационарность и полнота. Управляемость и наблюдаемость. Потоки. ω- предельные и α-предельные множества. Аттракторы и репеллеры. Теорема Пуанкаре - Бендиксона. Каскады и их свойства.	10
2.	Устойчивость	Устойчивость по Ляпунову. Устойчивость в целом. Теоремы об асимптотической устойчивости в целом. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Структурная устойчивость и бифуркации. Бифуркации положения равновесия. Показатели Ляпунова. Бифуркационная теорема Хопфа. Теорема Ляпунова о центре. Обобщенные координаты и принцип наименьшего действия. Уравнения Эйлера - Лагранжа. Преобразование Лежандра и его основные свойства. Уравнения Гамильтона. Законы сохранения. Переменные действие - угол. Универсальное отображение нелинейных колебаний. Одномерный осциллятор, нелинейный осциллятор. Колебания электронной плазмы.	12
3.	Нелинейные и динамические системы	Диссипативные и автоколебательные системы. Уравнение Ван дер Поля. Стационарное решение при больших ε. Метод малого параметра. Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля при малых ε. Движение в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля. Теорема Пуанкаре о невозвращении и ее применения. Теорема КАМ. Химические и биохимические реакции. Автокаталитическая реакция. Модель роста популяции Мальтуса. Модель Лотки - Вольтерра для случая конкуренции между видами.	12

		Модель Лотки - Вольтерра "хищник - жертва". Брюсселятор и его исследование. Орегонатор и его исследование. Уравнение Навье - Стокса. Ламинарное и турбулентное движение жидкости. Модель Лоренца. Исследование модели Лоренца. Понятие об имитационном моделировании и языках моделирования.	
4.	Логистические отображения и их свойства	Исследование логистического отображения методом ренормгруппы. Универсальность бифуркаций удвоения периода. Постоянные Фейгенбаума. Сдвиг Бернулли. Связь показателей Ляпунова и энтропии при исследовании одномерных отображений. Эргодические преобразования. Примеры отображений. Эргодическая теорема. Вычисление показателей Ляпунова для некоторых систем. Отображение окружности на себя. Число Вращения. Исследование стандартного отображения окружности на себя. Некоторые двумерные отображения. Отображение пекаря и его свойства. Отображение Хенона и его исследование. Фрактальные понятия нелинейной динамики. Примеры фракталов и их емкостная размерность. Меры фрактальной размерности и их сравнение.	17

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ) не предусмотрены учебным планом

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Основная литература:

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с
2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. –М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
3. Малкин И.Г. Теория Устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
4. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
5. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
6. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

Дополнительная литература:

7. Андронов А.А., Витт М.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. –М.: Физматгиз, 1959. – 915с.
8. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. –М.: Наука, 1970. – 238 с.
9. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы.. –М.: Мир, 1982. – 216 с.
10. Хакен Г. Синергетика. –М.: Мир, 1980. – 368 с.
11. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.
12. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров.–М.: Мир, 1990. – 312 с.
13. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания.. – М.: Наука, 1987. – 424
14. Коняев Ю.А., Ваджира Мергия Блча О методе аналогии при изучении математических моделей студентами инженерных специальностей. /Сборник трудов международной конференции «Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании». - Москва, РУДН, 4-6 февраля 2013г. с 369 – 373

в) программное обеспечение_________нет_______________________________________

____

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы___________________

________ http://ru.wikipedia.org ____

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

- Электронные библиотеки, доступные в сети INTERNET. Например, по адресам http://poiskknig.ru, http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm http://www.mathnet.ru http://ilib.mirror1.mccme.ru/

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Промежуточные контрольные мероприятия:

1.Контрольная работа N1.

2. Выполнение учебно-исследовательского проекта.

Итоговый контроль: Экзамен.

Разработчик:

Профессор кафедры высшей математики Ю.А. Коняев

Аспирант М.Б. Ваджира

Приложение 2

ПРОГРАММА

Наименование дисциплины:

Математическое моделирование и однородные дифференциальные уравнения

Рекомендуется для направления подготовки

____552700 «Энергомашиностроение» ______

Квалификация (степень) выпускника _бакалавр техники и технологии__

2. Цели и задачи дисциплины:

-сформировать у студентов целостное представление о роли математических методов и математических моделей в инженерных процессах;

- раскрыть основные понятия и методы математического моделирования инженерных процессов;

- сформировать и развить у студентов навыки применения методологии и методов математического моделирования с использованием математического аппарата, а также вычислительной техники к прикладным инженерных задачах;

- научить студентов самостоятельной работе с учебной и научной литературой;

- развивать и совершенствовать логическое и аналитическое мышление для умения анализировать, сравнивать, оценивать, выбирать, интерпретировать и т.д.

---

2. Место дисциплины в структуре ООП: Математический и естественнонаучный цикл. Базовая часть

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

- Способность применять знания на практике (ОК-6);
- Способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-8);
- Фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности (ОК-11);
- Способность к анализу и синтезу (ОК-14);
- Умение формулировать результат (ПК-3)
- Умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат (ПК-5)
- Умение ориентироваться в постановках задач (ПК-8)
- Знание корректных постановок классических задач (ПК-9)
- Понимание корректности постановок задач (ПК-10)
- Владение методами математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач (ПК-20)
- Умение самостоятельно математически корректно ставить естественно-научные и инженерно-физические задачи (ПК-25)

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать

- Основные понятия и типы математических моделей;
- Основные методы построения инженерно -математических моделей;

Уметь

- Составлять математическую модель конкретной задачи;
- Классифицировать задачи по типам;
- Выбирать способы решения поставленных задач;
- Анализировать и интерпретировать данные и полученные решения;
- Применять математические модели к решению прикладных и исследовательских задач.

Владеть

- Навыками математических вычислений;
- Навыками сведения задач принятия управленческих решений к математической модели;
- Анализа обработки данных для математической постановки и решения задач;
- Методами и техническими средствами решения задач
- Навыками анализа и интерпретации полученных решений.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 144 часа или 4 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2	3	4
Аудиторные занятия (всего)	72			72	
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции				36	
Практические занятия (ПЗ)				36	
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					

Самостоятельная работа (всего)	72			72	
В том числе:	-	-	-	-	-
Курсовой проект (работа)				40	
Расчетно-графические работы					
Реферат				16	
Другие виды самостоятельной работы				16	
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)				Экзамен	
Общая трудоемкость час				72	
зач. ед.	144			4	

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Введение	Что такое математическое моделирование? Примеры. Методы и инструменты, чтобы решить отличительные уравнения. Математическое моделирование. Дифференциальные уравнения первого порядка. Автономное уравнение. Линейное уравнение первого порядка Факторы интеграции и интегралы. Однородные уравнения. Моделирование населения единственных разновидностей. Абстрактные модели области фазы. Пример о существования термодинамики энтропии. Существование, уникальность и местная теорема существования. Теорема уникальности. Метод Euler Разностное уравнение первого порядка
2.	Линейные уравнения	Модели для линейных генераторов. Весенне-массовая система. Электрическая система кругооборота Методы, чтобы решить второй заказ линейные уравнения. Однородные уравнения. Линейные генераторы. Гармонические генераторы Принуждение и резонанс. Неоднородные уравнения. Метод неопределенных

		коэффициентов. Метод изменения констант.
3.	Линейные системы с постоянными коэффициентами	Задача с начальными условиями для n × n линейных систем. Примеры. Линейность и пространство решения. 2 × 2 системы . Нахождение точных решений.
4.	Метод Лапласовских преобразований	Лапласовское преобразование. Примеры. Обратное Лапласовское преобразование. Свойства Лапласовского преобразования. Общие линейные уравнения с постоянными коэффициентами.
5.	Устойчивость	Устойчивость и метод Ляпунова. Устойчивость и асимптотическая устойчивость.
6.	Нелинейные системы	Нелинейные системы в двух измерениях Биологические модели. Система Вольтерра- Латка.
7.	введение в динамическую систему	Понятие динамической системы. Периодические решения. Система хищник-жертва
8.	Автономные системы	Понятие автономная система. Равновесие и линеаризация Гиперболическое равновесие Равновесие в модели соревнования.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9,10
1.	**Прикладная математика**	+		+					+	

2.	**Физика**			+				+		+
3.	**Теоретическая механика**		+	+				+		
4.	**электротехника**			+	+	+		+	+	+

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин	СРС	Все-го час.
1.	Введение	8	6				
2.	Линейные уравнения	6	6				
3.	Линейные системы с постоянными коэффициентами	4	6			16	
4.	Метод Лапласовских преобразований	6	6				
5.	Устойчивость	4	4				
6.	Нелинейные системы	4	4			16	
7.	введение в динамическую систему	2	2				
8.	Автономные системы	2	4			40	

6. Лабораторный практикум <u>не предусмотрены учебным планом.</u>

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1.	Введение	Что такое математическое моделирование? Примеры. Методы и инструменты, чтобы решить отличительные уравнения. Математическое	6

		моделирование. Дифференциальные уравнения первого порядка. Автономное уравнение. Линейное уравнение первого порядка Факторы интеграции и интегралы. Однородные уравнения. Моделирование населения единственных разновидностей. Абстрактные модели области фазы. Пример о существования термодинамики энтропии. Существование, уникальность и местная теорема существования. Теорема уникальности. Метод Euler Разностное уравнение первого порядка	
2.	Линейные уравнения	Модели для линейных генераторов. Весенне-массовая система. Электрическая система кругооборота Методы, чтобы решить второй заказ линейные уравнения. Однородные уравнения. Линейные генераторы. Гармонические генераторы Принуждение и резонанс. Неоднородные уравнения. Метод неопределенных коэффициентов. Метод изменения констант.	6
3.	Линейные системы с постоянными коэффициентами	Задача с начальными условиями для n × n линейных систем. Примеры. Линейность и пространство решения. 2 × 2 системы . Нахождение точных решений.	6
4.	Метод Лапласовских преобразований	Лапласовское преобразование. Примеры. Обратное Лапласовское преобразование. Свойства Лапласовского преобразования. Общие линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	6
5.	Устойчивость	Устойчивость и метод Ляпунова. Устойчивость и асимптотическая устойчивость.	4

6.	Нелинейные системы	Нелинейные системы в двух измерениях Биологические модели. Система Вольтерра- Латка.	4
7.	введение в динамическую систему	Понятие динамической системы. Периодические решения. Система хищник-жертва	2
8.	Автономные системы	Понятие автономная система. Равновесие и линеаризация Гиперболическое равновесие Равновесие в модели соревнования.	4

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ) не предусмотрены учебным планом

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука,1982.

2.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, 2. Интегралпресс. 2004.

3.Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. М.: Высш.шк.,1985.

4.Рекач Ф.В., Панфилов Н.Г., Попов А.М. Лекции по высшей математике. Части I и II. М. РУДН, 2007, 2009.

5. *Меркин, Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движений. М., Наука,1987 304с.
6.*Вазов В.* Асимптотические разложения решений ОДУ. М., Мир, 1968, 464с.

б) дополнительная литература

1. *Кузнецова О.А.* Математическое моделирование оценочной системы компетенций / С.Ш.Палферова, Н.В.Колачева: Межвузовский сборник научных трудов «Математика и математическое образование. Теория и практика» - Ярославль, 2010 г., с. 281-285

2. *Коняев Ю.А., Вакджира Мергия Блча* О методе аналогии при изучении математических моделей студентами инженерных специальностей. Сборник трудов международной конференции «Интеграционные процессы в естественнонаучном и математическом образовании». Москва, РУДН, 4-6 февраля 2013г. с 369 – 373

в) программное обеспечение_________нет_______________________________________

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы___________________

________ http://ru.wikipedia.org ____

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

- Электронные библиотеки, доступные в сети INTERNET. Например, по адресам http://poiskknig.ru, http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm http://www.mathnet.ru http://ilib.mirror1.mccme.ru/

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Промежуточные контрольные мероприятия:

1.Контрольная работа N1.

2. Выполнение учебно-исследовательского проекта

Разработчик:

Профессор кафедры высшей математики Ю.А. Коняев

Аспирант М.Б. Ваджира

Приложение 3

Пример контрольной работы.

1. Разработать математическую модель рост численности населения города.

Коэффициенты рождаемости и смертности пропорционально населению и временной интервал.

Параметры:

$P(t)$ – популяции в момент t

$\Delta \mathrm{P}$ −увеличение численности населения в интервал времени Δt.

Тогда $\Delta \mathrm{P} =$ родившихся в Δt - Δt смертей Δt

$$= \mathrm{C}_1 P(t) \Delta t - \mathrm{C}_2 P(t) \Delta t$$

$$= (\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2) P(t) \Delta t$$

Темпы роста $= \frac{\Delta P}{\Delta t} \mathrm{C} P(t)$.

Переходя к пределу $\Delta t \to 0,$ мы получаем, решение почтительным дифференциальное уравнение

$P(t) = \mathrm{P}_0 e^{ct},$ где P_0 населения во время $t = 0$.

рост численности населения зависит от рост постоянной $\mathrm{C} = C_1 - C_2$. Население будет устойчивым, если $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2$